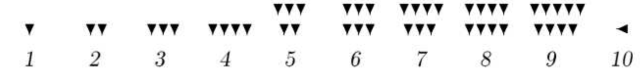
Números y cantidades. El continuo y lo discreto

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

- En el tercer milenio a.C. en el antiguo Egipto y en Mesopotamia se inventaron diversos símbolos con significado numérico.

- En el tercer milenio a.C. en el antiguo Egipto y en Mesopotamia se inventaron diversos símbolos con significado numérico.

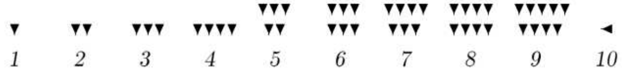
1. **Los números de los babilonios** *(escritura cuneiforme):*



-

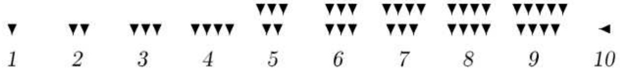
- En el tercer milenio a.C. en el antiguo Egipto y en Mesopotamia se inventaron diversos símbolos con significado numérico.

1. **Los números de los babilonios** *(escritura cuneiforme):*



2. **Los números de los egipcios** *(en su escritura jeroglífica):*

- En el tercer milenio a.C. en el antiguo Egipto y en Mesopotamia se inventaron diversos símbolos con significado numérico.
  - 1. **Los números de los babilonios** *(escritura cuneiforme):*

  - 2. **Los números de los egipcios** *(en su escritura jeroglífica):*

- Contar, con la ayuda de símbolos numéricos, señala el principio de la Aritmética.

- Los griegos de la antigüedad distinguían entre *“número”* y *“cantidad”* o *“magnitud”*.

- Los griegos de la antigüedad distinguían entre *"número"* y *"cantidad"* o *"magnitud"*.
- Un número es una multiplicidad que se obtiene por repetición de un individuo – la unidad –, cuyas partes están separadas – son discontinuas – y tienen fronteras bien definidas. Todo esto se expresa diciendo que los números son de naturaleza discreta.

- Los griegos de la antigüedad distinguían entre *“número”* y *“cantidad”* o *“magnitud”*.
- Un número es una multiplicidad que se obtiene por repetición de un individuo – la unidad –, cuyas partes están separadas – son discontinuas – y tienen fronteras bien definidas. Todo esto se expresa diciendo que los números son de naturaleza discreta.
- Una “cantidad” puede ser, entre otras cosas, tiempo, longitud, volumen, velocidad o masa. La característica esencial de la cantidad es su *continuidad*. Una cantidad puede dividirse indefinidamente sin perder su naturaleza pues no está formada por partes separadas que son réplicas de una unidad.

- Medir magnitudes.

- Medir magnitudes.
- *Expresar numéricamente* la longitud de un segmento $\overline{AB}$.

- Medir magnitudes.
- *Expresar numéricamente* la longitud de un segmento $\overline{AB}$.
- Elegir una *unidad de medida* $\overline{OU}$ y comparar ambos segmentos.

- Medir magnitudes.
- *Expresar numéricamente* la longitud de un segmento $\overline{AB}$.
- Elegir una *unidad de medida* $\overline{OU}$ y comparar ambos segmentos.
- Puede ocurrir que $\overline{AB} = m\,\overline{OU}$. El número m representa entonces la *medida* de $\overline{AB}$ respecto de $\overline{OU}$.

- Medir magnitudes.
- *Expresar numéricamente* la longitud de un segmento $\overline{AB}$.
- Elegir una *unidad de medida* $\overline{OU}$ y comparar ambos segmentos.
- Puede ocurrir que $\overline{AB} = m\overline{OU}$. El número m representa entonces la *medida* de $\overline{AB}$ respecto de $\overline{OU}$.
- Puede ocurrir que $\overline{OU} = n\overline{OU'}$ y $\overline{AB} = m\overline{OU'}$. Entonces se dice que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{OU}$ son *conmensurables*.

- Medir magnitudes.
- *Expresar numéricamente* la longitud de un segmento $\overline{AB}$.
- Elegir una *unidad de medida* $\overline{OU}$ y comparar ambos segmentos.
- Puede ocurrir que $\overline{AB} = m\overline{OU}$. El número m representa entonces la *medida* de $\overline{AB}$ respecto de $\overline{OU}$.
- Puede ocurrir que $\overline{OU} = n\overline{OU'}$ y $\overline{AB} = m\overline{OU'}$. Entonces se dice que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{OU}$ son *conmensurables*.
- Esto es lo que se expresa diciendo que *la razón de $\overline{AB}$ respecto de $\overline{OU}$ es* $m : n$ (léase m sobre n).

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OU}} = \frac{m}{n}$$

Para tratar de encontrar una unidad de medida común para dos segmentos $\alpha_0 = \overline{AB}$ y $\alpha_1 = \overline{CD}$ se procede como sigue. Supuesto que $\alpha_0 > \alpha_1$, quitamos de α_0 tantas veces como podamos α_1 hasta obtener como sobrante un segmento $\alpha_2 < \alpha_1$:

Para tratar de encontrar una unidad de medida común para dos segmentos $\alpha_0 = \overline{AB}$ y $\alpha_1 = \overline{CD}$ se procede como sigue. Supuesto que $\alpha_0 > \alpha_1$, quitamos de α_0 tantas veces como podamos α_1 hasta obtener como sobrante un segmento $\alpha_2 < \alpha_1$:

$$\alpha_0 = n_1 \alpha_1 + \alpha_2 \qquad \alpha_2 < \alpha_1$$

Para tratar de encontrar una unidad de medida común para dos segmentos $\alpha_0 = \overline{AB}$ y $\alpha_1 = \overline{CD}$ se procede como sigue. Supuesto que $\alpha_0 > \alpha_1$, quitamos de α_0 tantas veces como podamos α_1 hasta obtener como sobrante un segmento $\alpha_2 < \alpha_1$:

$$\alpha_0 = n_1\alpha_1 + \alpha_2 \qquad \alpha_2 < \alpha_1$$

Es decir, el segmento α_0 contiene n_1 veces al α_1 y queda un segmento sobrante $\alpha_2 < \alpha_1$.

Para tratar de encontrar una unidad de medida común para dos segmentos $\alpha_0 = \overline{AB}$ y $\alpha_1 = \overline{CD}$ se procede como sigue. Supuesto que $\alpha_0 > \alpha_1$, quitamos de α_0 tantas veces como podamos α_1 hasta obtener como sobrante un segmento $\alpha_2 < \alpha_1$:

$$\alpha_0 = n_1\alpha_1 + \alpha_2 \qquad \alpha_2 < \alpha_1$$

Es decir, el segmento α_0 contiene n_1 veces al α_1 y queda un segmento sobrante $\alpha_2 < \alpha_1$.Repetimos el proceso para obtener:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= n_2\alpha_2 + \alpha_3 \qquad \alpha_3 < \alpha_2 \\ \alpha_2 &= n_3\alpha_3 + \alpha_4 \qquad \alpha_4 < \alpha_3 \\ \vdots \quad &\quad \vdots \end{aligned}$$

Para tratar de encontrar una unidad de medida común para dos segmentos $\alpha_0 = \overline{AB}$ y $\alpha_1 = \overline{CD}$ se procede como sigue. Supuesto que $\alpha_0 > \alpha_1$, quitamos de α_0 tantas veces como podamos α_1 hasta obtener como sobrante un segmento $\alpha_2 < \alpha_1$:

$$\alpha_0 = n_1\alpha_1 + \alpha_2 \qquad \alpha_2 < \alpha_1$$

Es decir, el segmento α_0 contiene n_1 veces al α_1 y queda un segmento sobrante $\alpha_2 < \alpha_1$.Repetimos el proceso para obtener:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= n_2\alpha_2 + \alpha_3 \qquad \alpha_3 < \alpha_2 \\ \alpha_2 &= n_3\alpha_3 + \alpha_4 \qquad \alpha_4 < \alpha_3 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \end{aligned}$$

Si α_0 y α_1 tienen una unidad de medida común, este proceso termina después de un número finito de etapas, es decir, hay un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_{k-1} = n_k\alpha_k$ de manera que α_k es una unidad de medida común para los segmentos α_0 y α_1.

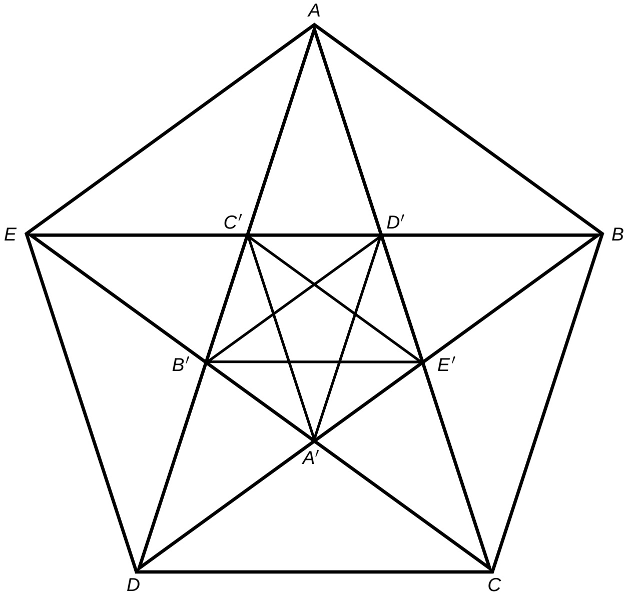
Para tratar de encontrar una unidad de medida común para dos segmentos $\alpha_0 = \overline{AB}$ y $\alpha_1 = \overline{CD}$ se procede como sigue. Supuesto que $\alpha_0 > \alpha_1$, quitamos de α_0 tantas veces como podamos α_1 hasta obtener como sobrante un segmento $\alpha_2 < \alpha_1$:

$$\alpha_0 = n_1\alpha_1 + \alpha_2 \qquad \alpha_2 < \alpha_1$$

Es decir, el segmento α_0 contiene n_1 veces al α_1 y queda un segmento sobrante $\alpha_2 < \alpha_1$.Repetimos el proceso para obtener:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= n_2\alpha_2 + \alpha_3 \qquad \alpha_3 < \alpha_2 \\ \alpha_2 &= n_3\alpha_3 + \alpha_4 \qquad \alpha_4 < \alpha_3 \\ &\vdots \qquad \vdots \end{aligned}$$

Si α_0 y α_1 tienen una unidad de medida común, este proceso termina después de un número finito de etapas, es decir, hay un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_{k-1} = n_k\alpha_k$ de manera que α_k es una unidad de medida común para los segmentos α_0 y α_1.Si el proceso puede continuarse indefinidamente obteniendo en cada etapa segmentos sobrantes cada vez más pequeños $\alpha_{n+1} < \alpha_n$ es porque los segmentos de partida no son conmensurables.


A
E
C′
D′
B
B′
E′
A′
D
C

En cualquier pentágono regular se cumple que:

$$\frac{\text{diagonal}}{\text{lado}} = \frac{\text{lado}}{\text{diagonal} - \text{lado}}$$

En cualquier pentágono regular se cumple que:

$$\frac{\text{diagonal}}{\text{lado}} = \frac{\text{lado}}{\text{diagonal} - \text{lado}}$$

La diferencia entre la diagonal y el lado del pentágono mayor es igual a la diagonal del pentágono menor:

$$\overline{BD} - \overline{EA} = \overline{BD} - \overline{DE'} = \overline{E'B} = \overline{D'B} = \overline{D'A'}$$

En cualquier pentágono regular se cumple que:

$$\frac{\text{diagonal}}{\text{lado}} = \frac{\text{lado}}{\text{diagonal} - \text{lado}}$$

La diferencia entre la diagonal y el lado del pentágono mayor es igual a la diagonal del pentágono menor:

$$\overline{BD} - \overline{EA} = \overline{BD} - \overline{DE'} = \overline{E'B} = \overline{D'B} = \overline{D'A'}$$

La diferencia entre el lado del pentágono mayor y la diagonal del pentágono menor es igual al lado del pentágono menor:

$$\overline{BC} - \overline{D'A'} = \overline{BA'} - \overline{BE'} = \overline{E'A'}$$

Pongamos $\alpha_0 = \text{diagonal} = \overline{BD}$, $\alpha_1 = \text{lado} = \overline{BC}$, $\alpha_2 = \alpha_0 - \alpha_1$. Tenemos que

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_1} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

Pongamos $\alpha_0 = \text{diagonal} = \overline{BD}$, $\alpha_1 = \text{lado} = \overline{BC}$, $\alpha_2 = \alpha_0 - \alpha_1$. Tenemos que

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_1} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

Este proceso puede continuarse pues si ahora formamos la diferencia $\alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_2$, puesto que α_2 es la diagonal del pentágono menor y α_3 es su lado, tenemos que $\alpha_3 < \alpha_2$ y poniendo $\alpha_4 = \alpha_2 - \alpha_3$:

Pongamos $\alpha_0 = \text{diagonal} = \overline{BD}$, $\alpha_1 = \text{lado} = \overline{BC}$, $\alpha_2 = \alpha_0 - \alpha_1$. Tenemos que

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_1} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

Este proceso puede continuarse pues si ahora formamos la diferencia $\alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_2$, puesto que α_2 es la diagonal del pentágono menor y α_3 es su lado, tenemos que $\alpha_3 < \alpha_2$ y poniendo $\alpha_4 = \alpha_2 - \alpha_3$:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_3} = \frac{\alpha_3}{\alpha_4}$$

Pongamos $\alpha_0 = \text{diagonal} = \overline{BD}$, $\alpha_1 = \text{lado} = \overline{BC}$, $\alpha_2 = \alpha_0 - \alpha_1$. Tenemos que

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_1} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

Este proceso puede continuarse pues si ahora formamos la diferencia $\alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_2$, puesto que α_2 es la diagonal del pentágono menor y α_3 es su lado, tenemos que $\alpha_3 < \alpha_2$ y poniendo $\alpha_4 = \alpha_2 - \alpha_3$:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_3} = \frac{\alpha_3}{\alpha_4}$$

Y dicho número es evidentemente el mismo para cualquier pentágono regular, luego:

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_1} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_3} = \frac{\alpha_3}{\alpha_4}$$

Pongamos $\alpha_0 = \text{diagonal} = \overline{BD}$, $\alpha_1 = \text{lado} = \overline{BC}$, $\alpha_2 = \alpha_0 - \alpha_1$. Tenemos que

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_1} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

Este proceso puede continuarse pues si ahora formamos la diferencia $\alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_2$, puesto que α_2 es la diagonal del pentágono menor y α_3 es su lado, tenemos que $\alpha_3 < \alpha_2$ y poniendo $\alpha_4 = \alpha_2 - \alpha_3$:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_3} = \frac{\alpha_3}{\alpha_4}$$

Y dicho número es evidentemente el mismo para cualquier pentágono regular, luego:

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_1} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_3} = \frac{\alpha_3}{\alpha_4}$$

Proceso que puede continuarse indefinidamente puesto que las diagonales de cada pentágono regular determinan otro pentágono regular.

Esto significa que el proceso que hemos descrito anteriormente:

$$\alpha_0 = 1 \cdot \alpha_1 + \alpha_2 \qquad \alpha_2 < \alpha_1$$

Esto significa que el proceso que hemos descrito anteriormente:

$$\alpha_0 = 1 \cdot \alpha_1 + \alpha_2 \qquad \alpha_2 < \alpha_1$$

Esto significa que el proceso que hemos descrito anteriormente:

$$\begin{array}{ll} \alpha_0 = 1 \cdot \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2 < \alpha_1 \\ \alpha_1 = 1 \cdot \alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_3 < \alpha_2 \\ \alpha_2 = 1 \cdot \alpha_3 + \alpha_4 & \alpha_4 < \alpha_3 \\ \vdots \quad\;\; \vdots & \end{array}$$

Esto significa que el proceso que hemos descrito anteriormente:

$$\begin{array}{llll} \alpha_0 = 1 \cdot \alpha_1 + \alpha_2 & & \alpha_2 < \alpha_1 \\ \alpha_1 = 1 \cdot \alpha_2 + \alpha_3 & & \alpha_3 < \alpha_2 \\ \alpha_2 = 1 \cdot \alpha_3 + \alpha_4 & & \alpha_4 < \alpha_3 \\ \quad \vdots \qquad \vdots & & \end{array}$$

no termina nunca y por tanto los segmentos α_0 y α_1 son inconmensurables.

Esto significa que el proceso que hemos descrito anteriormente:

$$\begin{array}{ll} \alpha_0 = 1 \cdot \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2 < \alpha_1 \\ \alpha_1 = 1 \cdot \alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_3 < \alpha_2 \\ \alpha_2 = 1 \cdot \alpha_3 + \alpha_4 & \alpha_4 < \alpha_3 \\ \vdots \quad\; \vdots & \end{array}$$

no termina nunca y por tanto los segmentos α_0 y α_1 son inconmensurables.

Luego la diagonal de un pentágono regular es inconmensurable con el lado.

De la igualdad

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_1} = \frac{\alpha_1}{\alpha_0 - \alpha_1}$$

se deduce que $\frac{\alpha_0}{\alpha_1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Y acabamos de probar que dicho número no es cociente de números enteros, es decir, no es un número racional.

De la igualdad

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_1} = \frac{\alpha_1}{\alpha_0 - \alpha_1}$$

se deduce que $\frac{\alpha_0}{\alpha_1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Y acabamos de probar que dicho número no es cociente de números enteros, es decir, no es un número racional.

El número $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es uno de los más famosos de las Matemáticas. Se conoce como *razón áurea*.

- El descubrimiento de la inconmensurabilidad fue un logro sin precedentes porque no fue empírico sino puramente teórico, puso de manifiesto que la Geometría no es Aritmética.

- El descubrimiento de la inconmensurabilidad fue un logro sin precedentes porque no fue empírico sino puramente teórico, puso de manifiesto que la Geometría no es Aritmética.
- Algunas propiedades que parecían claramente verdaderas (como que dos segmentos siempre admitían una unidad de medida común), resultaban ser falsas.

- El descubrimiento de la inconmensurabilidad fue un logro sin precedentes porque no fue empírico sino puramente teórico, puso de manifiesto que la Geometría no es Aritmética.
- Algunas propiedades que parecían claramente verdaderas (como que dos segmentos siempre admitían una unidad de medida común), resultaban ser falsas.
- Esta crisis de fundamentos hizo cuestionar la seguridad del método seguido para demostrar las propiedades de los objetos matemáticos, consistente en *hacer ver* o *poner en evidencia* que tales resultados eran necesariamente verdaderos.

- El descubrimiento de la inconmensurabilidad fue un logro sin precedentes porque no fue empírico sino puramente teórico, puso de manifiesto que la Geometría no es Aritmética.
- Algunas propiedades que parecían claramente verdaderas (como que dos segmentos siempre admitían una unidad de medida común), resultaban ser falsas.
- Esta crisis de fundamentos hizo cuestionar la seguridad del método seguido para demostrar las propiedades de los objetos matemáticos, consistente en *hacer ver* o *poner en evidencia* que tales resultados eran necesariamente verdaderos.
- En algún momento de la segunda mitad del siglo V a.C., un grupo de matemáticos griegos establecieron un nuevo método para el descubrimiento de la verdad: el *método axiomático-deductivo*, que es esencialmente el mismo que usamos hoy.

- El descubrimiento de la inconmensurabilidad fue un logro sin precedentes porque no fue empírico sino puramente teórico, puso de manifiesto que la Geometría no es Aritmética.
- Algunas propiedades que parecían claramente verdaderas (como que dos segmentos siempre admitían una unidad de medida común), resultaban ser falsas.
- Esta crisis de fundamentos hizo cuestionar la seguridad del método seguido para demostrar las propiedades de los objetos matemáticos, consistente en *hacer ver* o *poner en evidencia* que tales resultados eran necesariamente verdaderos.
- En algún momento de la segunda mitad del siglo V a.C., un grupo de matemáticos griegos establecieron un nuevo método para el descubrimiento de la verdad: el *método axiomático-deductivo*, que es esencialmente el mismo que usamos hoy.
- Se trata de, partiendo de unas pocas verdades evidentes (o axiomas), y a través de una serie de etapas sucesivas muy simples, obtener una cadena de afirmaciones, con la propiedad de que una cualquiera de ellas es verdadera siempre que lo sean todas las anteriores. A las leyes que rigen las formas correctas de pasar de una afirmación a otra de la cadena, se les llamó más tarde *leyes lógicas o deductivas*, y tienen un *carácter formal*, independiente del carácter de verdadero o falso de la afirmación a la que se aplica. A estas cadenas de afirmaciones lógicamente correctas, los griegos las llamaron *demostraciones*.

- No había una forma de comparar razones entre magnitudes inconmensurables pues el concepto de proporcionalidad pitagórico suponía que las cantidades que se hallan en proporción poseen una medida común.

- No había una forma de comparar razones entre magnitudes inconmensurables pues el concepto de proporcionalidad pitagórico suponía que las cantidades que se hallan en proporción poseen una medida común.
- Surge así la necesidad de extender una teoría de la proporción, es decir de la igualdad entre dos razones, que incluyera las razones de cantidades inconmensurables. Esto fue llevado a cabo por un gran matemático Eudoxo de Cnido (*c.* 400 - 347 a.C.) que introdujo la idea de *magnitud continua* o de *cantidad*.

- No había una forma de comparar razones entre magnitudes inconmensurables pues el concepto de proporcionalidad pitagórico suponía que las cantidades que se hallan en proporción poseen una medida común.
- Surge así la necesidad de extender una teoría de la proporción, es decir de la igualdad entre dos razones, que incluyera las razones de cantidades inconmensurables. Esto fue llevado a cabo por un gran matemático Eudoxo de Cnido (*c.* 400 - 347 a.C.) que introdujo la idea de *magnitud continua* o de *cantidad*.
- Se trata de un concepto que, aunque no se define, permite considerar cantidades tales como longitudes, áreas, volúmenes, ángulos, pesos, tiempo... Eudoxo concebía estas magnitudes de modo geométrico y no les asignaba ningún valor numérico. De esta forma se evitaba el uso de lo que nosotros conocemos como *números irracionales*.

- No había una forma de comparar razones entre magnitudes inconmensurables pues el concepto de proporcionalidad pitagórico suponía que las cantidades que se hallan en proporción poseen una medida común.
- Surge así la necesidad de extender una teoría de la proporción, es decir de la igualdad entre dos razones, que incluyera las razones de cantidades inconmensurables. Esto fue llevado a cabo por un gran matemático Eudoxo de Cnido (*c.* 400 - 347 a.C.) que introdujo la idea de *magnitud continua* o de *cantidad*.
- Se trata de un concepto que, aunque no se define, permite considerar cantidades tales como longitudes, áreas, volúmenes, ángulos, pesos, tiempo... Eudoxo concebía estas magnitudes de modo geométrico y no les asignaba ningún valor numérico. De esta forma se evitaba el uso de lo que nosotros conocemos como *números irracionales*.
- Eudoxo definía entonces una razón de tales cantidades y a partir de ella una proporción, es decir, una igualdad de dos razones, que cubría los casos de razones conmensurables e inconmensurables.

- No había una forma de comparar razones entre magnitudes inconmensurables pues el concepto de proporcionalidad pitagórico suponía que las cantidades que se hallan en proporción poseen una medida común.
- Surge así la necesidad de extender una teoría de la proporción, es decir de la igualdad entre dos razones, que incluyera las razones de cantidades inconmensurables. Esto fue llevado a cabo por un gran matemático Eudoxo de Cnido (*c.* 400 - 347 a.C.) que introdujo la idea de *magnitud continua* o de *cantidad*.
- Se trata de un concepto que, aunque no se define, permite considerar cantidades tales como longitudes, áreas, volúmenes, ángulos, pesos, tiempo... Eudoxo concebía estas magnitudes de modo geométrico y no les asignaba ningún valor numérico. De esta forma se evitaba el uso de lo que nosotros conocemos como *números irracionales*.
- Eudoxo definía entonces una razón de tales cantidades y a partir de ella una proporción, es decir, una igualdad de dos razones, que cubría los casos de razones conmensurables e inconmensurables.
- Puesto que no se utilizaba número alguno para expresar tales razones, los conceptos de razón y proporción quedaban ligados a la geometría lo que condujo al desarrollo de un *álgebra geométrica* cuya característica es tratar los problemas algebraicos por medio de construcciones geométricas.

- Por ejemplo, la fórmula del binomio

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

se expresa como sigue: *Si se divide un segmento, como viene dado, entonces el cuadrado sobre el segmento entero es igual a los cuadrados sobre las partes más dos veces el rectángulo formado por las partes conjuntamente*. Lo que debe entenderse en el sentido de que las áreas geométricamente combinadas de los dos cuadrados y el rectángulo sobre las partes eran igual al área del cuadrado sobre el segmento.

- Por ejemplo, la fórmula del binomio

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

se expresa como sigue: *Si se divide un segmento, como viene dado, entonces el cuadrado sobre el segmento entero es igual a los cuadrados sobre las partes más dos veces el rectángulo formado por las partes conjuntamente*. Lo que debe entenderse en el sentido de que las áreas geométricamente combinadas de los dos cuadrados y el rectángulo sobre las partes eran igual al área del cuadrado sobre el segmento.

- No hay que olvidar que para los griegos los únicos números son los naturales, y por tanto una propiedad relativa a cantidades que no se consideran numéricas no puede traducirse algebraicamente usando operaciones como suma y producto que los griegos solamente usaban cuando se trataba de números naturales.

- Por ejemplo, la fórmula del binomio

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

se expresa como sigue: *Si se divide un segmento, como viene dado, entonces el cuadrado sobre el segmento entero es igual a los cuadrados sobre las partes más dos veces el rectángulo formado por las partes conjuntamente*. Lo que debe entenderse en el sentido de que las áreas geométricamente combinadas de los dos cuadrados y el rectángulo sobre las partes eran igual al área del cuadrado sobre el segmento.
- No hay que olvidar que para los griegos los únicos números son los naturales, y por tanto una propiedad relativa a cantidades que no se consideran numéricas no puede traducirse algebraicamente usando operaciones como suma y producto que los griegos solamente usaban cuando se trataba de números naturales.
- Se desarrollo así una especie de *"álgebra geométrica"* en la que los números se representaban por segmentos de línea y las operaciones aritméticas fueron sustituidas por construcciones geométricas. Las ecuaciones lineales y cuadráticas fueron resueltas con técnicas geométricas, evitándose así el problema de las magnitudes inconmensurables. De esta forma en las matemáticas griegas el razonamiento geométrico llegó a considerarse como el modelo de razonamiento matemático riguroso. Y así siguió siendo durante más de 2000 años.

Por ejemplo, las identidades que con el simbolismo actual se traducen en:

Por ejemplo, las identidades que con el simbolismo actual se traducen en:

$$\sqrt{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}{2}}$$

Por ejemplo, las identidades que con el simbolismo actual se traducen en:

$$\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{\sqrt{a} + \sqrt{a-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a} - \sqrt{a-b}}{2}}$$

y

$$\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{a^2 - b^2}} = \sqrt{\frac{a+b}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-b}{2}}$$

Por ejemplo, las identidades que con el simbolismo actual se traducen en:

$$\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{\sqrt{a} + \sqrt{a-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a} - \sqrt{a-b}}{2}}$$

y

$$\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{a^2 - b^2}} = \sqrt{\frac{a+b}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-b}{2}}$$

Se demuestran... ¡mediante construcciones geométricas!

- Euclides, el matemático más famoso de la Escuela de Alejandría, expone la teoría de Eudoxo en el Libro V de los *Elementos* (300 a.C.) y en ella destacan los siguientes puntos que enunciamos con nuestro simbolismo actual muy diferente de la forma puramente verbal en que fueron formulados.

- Euclides, el matemático más famoso de la Escuela de Alejandría, expone la teoría de Eudoxo en el Libro V de los *Elementos* (300 a.C.) y en ella destacan los siguientes puntos que enunciamos con nuestro simbolismo actual muy diferente de la forma puramente verbal en que fueron formulados.
- **E1** (*Propiedad arquimediana*) Dadas dos cantidades siempre hay un múltiplo de una de ellas que excede a la otra. Es decir, si es $0 < a < b$ hay algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.

- Euclides, el matemático más famoso de la Escuela de Alejandría, expone la teoría de Eudoxo en el Libro V de los *Elementos* (300 a.C.) y en ella destacan los siguientes puntos que enunciamos con nuestro simbolismo actual muy diferente de la forma puramente verbal en que fueron formulados.
- **E1** (*Propiedad arquimediana*) Dadas dos cantidades siempre hay un múltiplo de una de ellas que excede a la otra. Es decir, si es $0 < a < b$ hay algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.

- Euclides, el matemático más famoso de la Escuela de Alejandría, expone la teoría de Eudoxo en el Libro V de los *Elementos* (300 a.C.) y en ella destacan los siguientes puntos que enunciamos con nuestro simbolismo actual muy diferente de la forma puramente verbal en que fueron formulados.
- **E1** (*Propiedad arquimediana*) Dadas dos cantidades siempre hay un múltiplo de una de ellas que excede a la otra. Es decir, si es $0 < a < b$ hay algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.
  Observa que esta propiedad impide la existencia de cantidades positivas *infinitamente pequeñas*, los llamados *infinitésimos* de los que hablaremos más adelante.
- **E2** (*Criterio de igualdad*) Las razones $a : b$ y $c : d$ son iguales si cualesquiera sean los enteros positivos m, n se tiene que

$$ma < nb \Longrightarrow mc < nd, \quad ma = nb \Longrightarrow mc = nd, \quad ma > nb \Longrightarrow mc > nd \qquad (1)$$

- Euclides, el matemático más famoso de la Escuela de Alejandría, expone la teoría de Eudoxo en el Libro V de los *Elementos* (300 a.C.) y en ella destacan los siguientes puntos que enunciamos con nuestro simbolismo actual muy diferente de la forma puramente verbal en que fueron formulados.
- **E1** (*Propiedad arquimediana*) Dadas dos cantidades siempre hay un múltiplo de una de ellas que excede a la otra. Es decir, si es $0 < a < b$ hay algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.
  Observa que esta propiedad impide la existencia de cantidades positivas *infinitamente pequeñas*, los llamados *infinitésimos* de los que hablaremos más adelante.
- **E2** (*Criterio de igualdad*) Las razones $a : b$ y $c : d$ son iguales si cualesquiera sean los enteros positivos m, n se tiene que

$$ma < nb \Longrightarrow mc < nd, \quad ma = nb \Longrightarrow mc = nd, \quad ma > nb \Longrightarrow mc > nd \qquad (1)$$

- Esta definición de la proporción no necesita suponer que las cantidades son conmensurables. Al mismo tiempo, permite demostrar todas las proposiciones conocidas sobre proporciones. Volveremos a considerar más adelante este elaborado criterio de igualdad que, desde luego, no aclaraba nada sobre la naturaleza de las cantidades irracionales y ponía de manifiesto la dificultad de reducir a la aritmética el estudio de las mismas.

La carencia de una teoría aritmética satisfactoria de las cantidades inconmensurables hizo que los matemáticos griegos consideraran la Geometría como una ciencia más general que la Aritmética, puesto que sólo la Geometría podía manipular las razones inconmensurables, y dedicaran sus esfuerzos al estudio de la primera en detrimento de la última. La consecuencia fue que la Geometría se convirtió en la base de casi todas las matemáticas y que durante casi 2000 años, en Europa, hasta al menos el año 1600, casi todo razonamiento matemático riguroso se expresó en lenguaje geométrico.

- Es sabido que la civilización Romana, tan excelente en tantos aspectos, no destacó en el estudio de las ciencias puras y, en particular, de las matemáticas. La prueba de ello es que no hay ningún matemático Romano digno de mención. No obstante, el sistema de numeración Romano se impuso extendiéndose por todo el Imperio.

- Es sabido que la civilización Romana, tan excelente en tantos aspectos, no destacó en el estudio de las ciencias puras y, en particular, de las matemáticas. La prueba de ello es que no hay ningún matemático Romano digno de mención. No obstante, el sistema de numeración Romano se impuso extendiéndose por todo el Imperio.
- Con el triunfo del Cristianismo a finales del siglo IV y la caída del Imperio Romano de Occidente en el año 476, se inicia una larga era de oscurantismo en Europa. En el año 529, el emperador cristiano Justiniano ordenó cerrar la Academia fundada por Platón por considerarla *reducto de enseñanzas paganas de funesta influencia*.

- Es sabido que la civilización Romana, tan excelente en tantos aspectos, no destacó en el estudio de las ciencias puras y, en particular, de las matemáticas. La prueba de ello es que no hay ningún matemático Romano digno de mención. No obstante, el sistema de numeración Romano se impuso extendiéndose por todo el Imperio.
- Con el triunfo del Cristianismo a finales del siglo IV y la caída del Imperio Romano de Occidente en el año 476, se inicia una larga era de oscurantismo en Europa. En el año 529, el emperador cristiano Justiniano ordenó cerrar la Academia fundada por Platón por considerarla *reducto de enseñanzas paganas de funesta influencia*.
- La fe y los dogmas no son demostrables lógicamente; absurdas disputas teológicas ocupan el lugar de los estudios de la Naturaleza y la Biblia es la fuente de todo conocimiento. Según San Agustín “Las palabras de las Escrituras tienen más autoridad que toda la inteligencia humana”. El racionalismo científico es sospechoso de paganismo. Entonces. . . ¿Para qué pensar?

- Es sabido que la civilización Romana, tan excelente en tantos aspectos, no destacó en el estudio de las ciencias puras y, en particular, de las matemáticas. La prueba de ello es que no hay ningún matemático Romano digno de mención. No obstante, el sistema de numeración Romano se impuso extendiéndose por todo el Imperio.
- Con el triunfo del Cristianismo a finales del siglo IV y la caída del Imperio Romano de Occidente en el año 476, se inicia una larga era de oscurantismo en Europa. En el año 529, el emperador cristiano Justiniano ordenó cerrar la Academia fundada por Platón por considerarla *reducto de enseñanzas paganas de funesta influencia*.
- La fe y los dogmas no son demostrables lógicamente; absurdas disputas teológicas ocupan el lugar de los estudios de la Naturaleza y la Biblia es la fuente de todo conocimiento. Según San Agustín "Las palabras de las Escrituras tienen más autoridad que toda la inteligencia humana". El racionalismo científico es sospechoso de paganismo. Entonces. . . ¿Para qué pensar?
- También, según San Agustín, "El buen cristiano debe permanecer alerta de los matemáticos y todos aquellos que realicen profecías vacías. Ya existe el peligro de que los matemáticos hayan hecho una alianza con el demonio para oscurecer el espíritu y confinar al hombre en las ataduras del Infierno".

A diferencia que en Grecia, en la India se había desarrollado principalmente la Aritmética y se conocía el sistema de numeración posicional decimal desde el siglo VI. La primera vez que el cero es tratado como un número de pleno derecho es en la obra *Brahmasphutasiddhanta* del matemático y astrónomo indio Brahmagupta (598 - 670). Esta obra también contenía el principio de la numeración decimal posicional y los métodos de cálculo del álgebra india. En ella se tratan los números negativos en términos muy parecidos a los actuales.

Figura. al-Jwarizmi

La herencia matemática griega pasa a los árabes. La cultura árabe tiene una época de esplendor en los siglos VIII - XII. Al-Mamun (c. 786 - 833), sexto califa de la dinastía Abasida, fundó en Bagdad la Casa de la Sabiduría, una especie de academia con una biblioteca y un observatorio. Allí se tradujeron las obras de los matemáticos y filósofos griegos y tuvieron conocimiento de las matemáticas indias.

El más conocido matemático de la Escuela de Bagdad fue Muhammad ibn-Musa al-Jwarizmi. En su obra *Libro de la Adición y la Sustracción según el cálculo de los hindúes* se describe el sistema decimal posicional y se dan métodos para realizar cálculos aritméticos con dicho sistema.

Figura. Fibonacci

Leonardo de Pisa (c. 1170 - 1250), más conocido como Fibonacci, aprendió en sus viajes por los países árabes del Mediterráneo a usar los métodos de al-Jwarizmi. Al regresar a Italia, publicó en 1202 el *Liber abaci*, obra que contribuyó a extender el sistema de numeración indo-árabe en Occidente. Estudiando las soluciones de una ecuación de tercer grado, Fibonacci probó que había números irracionales diferentes de los considerados por Euclides. En consecuencia, las técnicas del álgebra geométrica griega no permitían construir todas las cantidades inconmensurables.

Fibonacci dio también una interpretación de los números negativos como pérdidas o deudas, que tuvo bastante buena acogida. Pero todavía deberá pasar mucho tiempo para que los números negativos y el cero sean totalmente aceptados como números.

En este apresurado repaso que estamos dando a la historia de los números, debemos avanzar ahora casi trescientos años para llegar a la siguiente etapa protagonizada por los matemáticos italianos del Renacimiento Niccoló Tartaglia (*c.* 1500 - 1557), Gerolamo Cardano (1501 - 1576), Rafael Bombelli (1526 - 1572) y Ludovico Ferrari (1522 - 1565). Los dos primeros resolvieron la ecuación general de tercer grado de la cual solamente se conocían las soluciones en algunos casos particulares. En la resolución de la cúbica, Cardano tuvo en cuenta las soluciones negativas aunque las llamó “ficticias”, y comprobó que la cúbica podía tener tres soluciones.

Figura. Cardano

Así mismo, Cardano reconoció por primera vez la existencia de lo que ahora llamamos números complejos (a los que Napier llamó “los fantasmas de los números reales”) aunque no los aceptó como posibles soluciones. Por su parte, Bombelli fue el primero en especificar las reglas para sumar y multiplicar números complejos. Usando dichas reglas, probó que podían obtenerse soluciones reales correctas para la cúbica, incluso cuando la fórmula de Tartaglia – Cardano requería el cálculo de raíces de números negativos.

- De esta época es también un opúsculo *De Thiende* (1585) ("El Décimo") – 36 páginas – de Simon Stevin (1548 - 1620), ingeniero y matemático nacido en Brujas, en el que se introducen las fracciones decimales y se explica su uso en las operaciones aritméticas. Así mismo, en su obra *LÁrithmetique* (1585) escribió que "no hay números inexplicables, irregulares, irracionales, surds o absurdos", indicando con esto que todos los números debían ser tratados por igual y no hacer distinciones entre ellos como si fueran de distinta naturaleza. Después de Stevin, la idea de que 1 era un número ganó una amplia aceptación.

- De esta época es también un opúsculo *De Thiende* (1585) ("El Décimo") – 36 páginas – de Simon Stevin (1548 - 1620), ingeniero y matemático nacido en Brujas, en el que se introducen las fracciones decimales y se explica su uso en las operaciones aritméticas. Así mismo, en su obra *LÁrithmetique* (1585) escribió que "no hay números inexplicables, irregulares, irracionales, surds o absurdos", indicando con esto que todos los números debían ser tratados por igual y no hacer distinciones entre ellos como si fueran de distinta naturaleza. Después de Stevin, la idea de que 1 era un número ganó una amplia aceptación.
- La palabra griega "alogos", $\alpha\lambda o\gamma o\varsigma$, usada por los griegos para designar a los números irracionales, también significa "sin discurso" y los árabes la tradujeron por *asamm*, "sordo" o "mudo", que fue traducida al latín por *surdus*.

- De esta época es también un opúsculo *De Thiende* (1585) ("El Décimo") – 36 páginas – de Simon Stevin (1548 - 1620), ingeniero y matemático nacido en Brujas, en el que se introducen las fracciones decimales y se explica su uso en las operaciones aritméticas. Así mismo, en su obra *LÁrithmetique* (1585) escribió que "no hay números inexplicables, irregulares, irracionales, surds o absurdos", indicando con esto que todos los números debían ser tratados por igual y no hacer distinciones entre ellos como si fueran de distinta naturaleza. Después de Stevin, la idea de que 1 era un número ganó una amplia aceptación.
- La palabra griega "alogos", $\alpha\lambda o\gamma o\varsigma$, usada por los griegos para designar a los números irracionales, también significa "sin discurso" y los árabes la tradujeron por *asamm*, "sordo" o "mudo", que fue traducida al latín por *surdus*.
- A pesar de estos avances, los conceptos de "número" y "cantidad" de la antigüedad permanecen sin cambios notables hasta el siglo XVII cuando se desarrolla el simbolismo algebraico.
  Lo importante del simbolismo algebraico, no es tanto el uso de los símbolos por sí mismos, sino la *elaboración de reglas formales para realizar operaciones de forma simbólica*. Por ejemplo, a^2 puede entenderse como una forma simplificada de escribir "el área del cuadrado de lado a". Eso es muy distinto de escribir $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Esto último ya es una manipulación simbólica abstracta en la que las letras a, b no son más que símbolos sin una naturaleza concreta.

- François Viéte en su *In artem analyticem isagoge* (1591) expone una "logistica speciosa" (*specis*: símbolo), o arte de calcular con símbolos, que fue un paso decisivo para el desarrollo del concepto de cantidad abstracta. No obstante, Viéte consideraba que solamente las cantidades homogéneas podían compararse entre sí. Para entender esto debes tener en cuenta que, desde la antigüedad, el producto de dos cantidades, por ejemplo ab, representaba el área de un rectángulo de lados a y b. De la misma forma, abc representaba el volumen de un ortoedro. Una expresión como $ab+c$ no tenía significado porque no se podía sumar una longitud y un área: no eran cantidades homogéneas.

- François Viéte en su *In artem analyticem isagoge* (1591) expone una “logistica speciosa” (*specis*: símbolo), o arte de calcular con símbolos, que fue un paso decisivo para el desarrollo del concepto de cantidad abstracta. No obstante, Viéte consideraba que solamente las cantidades homogéneas podían compararse entre sí. Para entender esto debes tener en cuenta que, desde la antigüedad, el producto de dos cantidades, por ejemplo ab, representaba el área de un rectángulo de lados a y b. De la misma forma, abc representaba el volumen de un ortoedro. Una expresión como $ab+c$ no tenía significado porque no se podía sumar una longitud y un área: no eran cantidades homogéneas.
- El siguiente paso definitivo fue el invento de la *geometría analítica* en los años 1630 por Pierre Fermat y René Descartes. La introducción de coordenadas y la representación de curvas por medio de ecuaciones supuso un cambio de perspectiva revolucionario. Piensa que, en la Antigüedad, solamente podían estudiarse aquellas curvas para las que se conocía un método de construcción con regla y compás. Ahora, por primera vez, los objetos geométricos podían estudiarse por medio del simbolismo algebraico, cuando hasta entonces lo usual había sido que el simbolismo algebraico fuera un pálido reflejo de relaciones geométricas.

Una importante creación de Descartes fue el desarrollo de un "álgebra de segmentos". Para ello, tomando como unidad un segmento u, construyó un segmento (cantidad) c que verificaba la proporción $u : a = b : c$. Dicho segmento c representaba el producto de los dos segmentos (cantidades) a y b. También construyó segmentos que se correspondían con la suma, la diferencia y el cociente de segmentos. De esta manera, cualquier operación con cantidades se corresponde con un segmento, lo que hace que todas las cantidades sean homogéneas. Una expresión como $ab + c$ ya es correcta porque representa un segmento de línea. Esta homogeneización de todas las cantidades conduce al concepto de *cantidad abstracta* desconocido en la antigüedad.

Una importante creación de Descartes fue el desarrollo de un “álgebra de segmentos”. Para ello, tomando como unidad un segmento u, construyó un segmento (cantidad) c que verificaba la proporción $u : a = b : c$. Dicho segmento c representaba el producto de los dos segmentos (cantidades) a y b. También construyó segmentos que se correspondían con la suma, la diferencia y el cociente de segmentos. De esta manera, cualquier operación con cantidades se corresponde con un segmento, lo que hace que todas las cantidades sean homogéneas. Una expresión como $ab + c$ ya es correcta porque representa un segmento de línea. Esta homogeneización de todas las cantidades conduce al concepto de *cantidad abstracta* desconocido en la antigüedad.

Descartes introdujo el término “imaginario” para referirse a aquellas soluciones de una ecuación polinómica que solamente están en “nuestra imaginación”. Como era costumbre, llamaba “soluciones falsas” a las soluciones negativas. Las “raíces verdaderas” eran las positivas.

Figura. Viéte

Figura. Fermat

Figura. Descartes

A estos progresos en matemáticas hay que agregar los realizados en astronomía y en mecánica por Copérnico (1473-1543), Kepler (1571-1630) y Galileo(1564-1642). Todos ellos se apoyan en métodos experimentales y empíricos cuantitativos para formular sus resultados como Leyes de la Naturaleza de contenido matemático.

A estos progresos en matemáticas hay que agregar los realizados en astronomía y en mecánica por Copérnico (1473-1543), Kepler (1571-1630) y Galileo(1564-1642). Todos ellos se apoyan en métodos experimentales y empíricos cuantitativos para formular sus resultados como Leyes de la Naturaleza de contenido matemático.

Al mismo tiempo, a lo largo de los dos primeros tercios del siglo XVII, se van desarrollando una gran variedad de “métodos infinitesimales”, cuyos precedentes clásicos estaban en Eudoxo y Arquímedes, para resolver multitud de problemas de tipo geométrico y analítico, como cálculo de tangentes a curvas, cálculo de áreas y de valores máximos.

A estos progresos en matemáticas hay que agregar los realizados en astronomía y en mecánica por Copérnico (1473-1543), Kepler (1571-1630) y Galileo(1564-1642). Todos ellos se apoyan en métodos experimentales y empíricos cuantitativos para formular sus resultados como Leyes de la Naturaleza de contenido matemático.

Al mismo tiempo, a lo largo de los dos primeros tercios del siglo XVII, se van desarrollando una gran variedad de "métodos infinitesimales", cuyos precedentes clásicos estaban en Eudoxo y Arquímedes, para resolver multitud de problemas de tipo geométrico y analítico, como cálculo de tangentes a curvas, cálculo de áreas y de valores máximos.

Los trabajos de Cavalieri (1598 - 1647) , Wallis (1616 - 1703) y Barrow (1630 - 1677) entre otros muchos, establecieron las bases sobre las que dos grandes genios, Newton (1643 - 1727) y Leibniz (1646 - 1716) desarrollaron el Cálculo Infinitesimal.

El Cálculo Infinitesimal son las matemáticas del cambio y del movimiento. Las ideas de magnitud variable y de dependencia entre magnitudes son fundamentales en estas nuevas matemáticas. Surge así el concepto de “variable” que se forma a partir de la idea de cantidad abstracta.

El Cálculo Infinitesimal son las matemáticas del cambio y del movimiento. Las ideas de magnitud variable y de dependencia entre magnitudes son fundamentales en estas nuevas matemáticas. Surge así el concepto de “variable” que se forma a partir de la idea de cantidad abstracta.

En el libro de L’Hôpital *Analyse des infiniment petits, pour líntelligence des lignes courbes* (1696) se lee: *Se llaman cantidades variables aquellas que aumentan o disminuyen continuamente, y por contraste cantidades constantes aquellas que permanecen igual mientras las otras cambian.*

El Cálculo Infinitesimal son las matemáticas del cambio y del movimiento. Las ideas de magnitud variable y de dependencia entre magnitudes son fundamentales en estas nuevas matemáticas. Surge así el concepto de “variable” que se forma a partir de la idea de cantidad abstracta.

En el libro de L’Hôpital *Analyse des infiniment petits, pour líntelligence des lignes courbes* (1696) se lee: *Se llaman cantidades variables aquellas que aumentan o disminuyen continuamente, y por contraste cantidades constantes aquellas que permanecen igual mientras las otras cambian.*

Los matemáticos de los siglos XVII y XVIII usan el término “cantidad” para referirse a cantidades generales abstractas, así como a cantidades geométricas concretas, pero siempre se consideran dichas cantidades como continuas. La noción de cantidad continua no se discute, se trataba de un concepto basado en la realidad física. Según Leibniz “Natura non facit saltus”.

El Cálculo Infinitesimal son las matemáticas del cambio y del movimiento. Las ideas de magnitud variable y de dependencia entre magnitudes son fundamentales en estas nuevas matemáticas. Surge así el concepto de “variable” que se forma a partir de la idea de cantidad abstracta.

En el libro de L'Hôpital *Analyse des infiniment petits, pour líntelligence des lignes courbes* (1696) se lee: *Se llaman cantidades variables aquellas que aumentan o disminuyen continuamente, y por contraste cantidades constantes aquellas que permanecen igual mientras las otras cambian.*

Los matemáticos de los siglos XVII y XVIII usan el término “cantidad” para referirse a cantidades generales abstractas, así como a cantidades geométricas concretas, pero siempre se consideran dichas cantidades como continuas. La noción de cantidad continua no se discute, se trataba de un concepto basado en la realidad física. Según Leibniz “Natura non facit saltus”.

La idea de cantidad es más general que la idea de número. Un segmento de línea, por ejemplo, representa una cantidad, pero él mismo no se reduce a números. La idea de número como elemento de un conjunto no existe en el siglo XVIII. En *Arithmetica universalis* (1707) Newton escribe: *Por número entendemos no tanto una multitud de cantidades, como la razón abstracta de cualquier cantidad a otra cantidad de la misma clase que tomamos por unidad. Un entero es lo que es medido por la unidad, una fracción, aquello a lo que una parte submúltiplo de la unidad mide, y un surd, aquello que es inconmensurable con la unidad.*

Esta interpretación de los números se corresponde con la consideración de las Matemáticas en los siglos XVII y XVIII como una Ciencia de la Naturaleza y, en consecuencia, los objetos matemáticos deben estar vinculados, directa o indirectamente, con la realidad física. Por ello, solamente se consideran como "verdaderos números" los que representan el resultado de una medida: los enteros y los racionales positivos. Los demás números (negativos, el 0 y los imaginarios) son necesarios y útiles para los cálculos, pero no son considerados "verdaderos números" son "ficticios".

Esta interpretación de los números se corresponde con la consideración de las Matemáticas en los siglos XVII y XVIII como una Ciencia de la Naturaleza y, en consecuencia, los objetos matemáticos deben estar vinculados, directa o indirectamente, con la realidad física. Por ello, solamente se consideran como "verdaderos números" los que representan el resultado de una medida: los enteros y los racionales positivos. Los demás números (negativos, el 0 y los imaginarios) son necesarios y útiles para los cálculos, pero no son considerados "verdaderos números" son "ficticios".

Los números irracionales positivos, aunque no son números en sentido estricto, tampoco son propiamente "ficticios", porque pueden representarse por un segmento y sirven para medir cantidades geométricamente especificadas. Los racionales e irracionales positivos son llamados "números reales" en oposición a los números imaginarios.

Esta interpretación de los números se corresponde con la consideración de las Matemáticas en los siglos XVII y XVIII como una Ciencia de la Naturaleza y, en consecuencia, los objetos matemáticos deben estar vinculados, directa o indirectamente, con la realidad física. Por ello, solamente se consideran como "verdaderos números" los que representan el resultado de una medida: los enteros y los racionales positivos. Los demás números (negativos, el 0 y los imaginarios) son necesarios y útiles para los cálculos, pero no son considerados "verdaderos números" son "ficticios".

Los números irracionales positivos, aunque no son números en sentido estricto, tampoco son propiamente "ficticios", porque pueden representarse por un segmento y sirven para medir cantidades geométricamente especificadas. Los racionales e irracionales positivos son llamados "números reales" en oposición a los números imaginarios.

Los números empiezan a considerarse como entidades simbólicas sobre las que se opera con unas reglas establecidas (pero que no pueden ser libremente definidas). Por ejemplo, según Euler, $\sqrt{12}$ es un número que multiplicado por sí mismo es igual a 12, y esto es una definición simbólica de $\sqrt{12}$.

Esta interpretación de los números se corresponde con la consideración de las Matemáticas en los siglos XVII y XVIII como una Ciencia de la Naturaleza y, en consecuencia, los objetos matemáticos deben estar vinculados, directa o indirectamente, con la realidad física. Por ello, solamente se consideran como "verdaderos números" los que representan el resultado de una medida: los enteros y los racionales positivos. Los demás números (negativos, el 0 y los imaginarios) son necesarios y útiles para los cálculos, pero no son considerados "verdaderos números" son "ficticios".

Los números irracionales positivos, aunque no son números en sentido estricto, tampoco son propiamente "ficticios", porque pueden representarse por un segmento y sirven para medir cantidades geométricamente especificadas. Los racionales e irracionales positivos son llamados "números reales" en oposición a los números imaginarios.

Los números empiezan a considerarse como entidades simbólicas sobre las que se opera con unas reglas establecidas (pero que no pueden ser libremente definidas). Por ejemplo, según Euler, $\sqrt{12}$ es un número que multiplicado por sí mismo es igual a 12, y esto es una definición simbólica de $\sqrt{12}$.

El desarrollo inicial del Cálculo, en el último tercio del siglo XVII, se basa en ideas vagas e imprecisas como "cantidad evanescente", "razón última" o "infinitamente pequeño". El uso de los "infinitésimos", considerados como cantidades que, sin ser nulas, son más pequeñas que cualquier cantidad positiva imaginable, es característico de las técnicas del Cálculo.

Tiempo y espacio son ejemplos de “continuo”. Una entidad continua, un *continuo*, es lo que no está roto ni separado ni tiene huecos, lo que puede ser indefinidamente dividido sin que pierda su naturaleza. Por ejemplo, un volumen de líquido, un segmento, un movimiento o, los ejemplos más inmediatos, el espacio y el tiempo.

Tiempo y espacio son ejemplos de “continuo”. Una entidad continua, un *continuo*, es lo que no está roto ni separado ni tiene huecos, lo que puede ser indefinidamente dividido sin que pierda su naturaleza. Por ejemplo, un volumen de líquido, un segmento, un movimiento o, los ejemplos más inmediatos, el espacio y el tiempo.

Lo que relaciona espacio y tiempo es el movimiento. El Cálculo es la matemática del movimiento, del cambio continuo. El Cálculo se apoya en la geometría analítica de Descartes y Fermat y en la Aritmética. La Geometría se ocupa de cantidades continuas; la Aritmética de lo discreto. El Cálculo es la síntesis de lo “discreto” y lo “continuo”. Los “infinitésimos”, las cantidades infinitesimales, son el puente entre lo discreto y lo continuo.

Tiempo y espacio son ejemplos de “continuo”. Una entidad continua, un *continuo*, es lo que no está roto ni separado ni tiene huecos, lo que puede ser indefinidamente dividido sin que pierda su naturaleza. Por ejemplo, un volumen de líquido, un segmento, un movimiento o, los ejemplos más inmediatos, el espacio y el tiempo.

Lo que relaciona espacio y tiempo es el movimiento. El Cálculo es la matemática del movimiento, del cambio continuo. El Cálculo se apoya en la geometría analítica de Descartes y Fermat y en la Aritmética. La Geometría se ocupa de cantidades continuas; la Aritmética de lo discreto. El Cálculo es la síntesis de lo “discreto” y lo “continuo”. Los “infinitésimos”, las cantidades infinitesimales, son el puente entre lo discreto y lo continuo.

Los procedimientos del Cálculo, límites, convergencia, continuidad, pueden describirse como matemáticas del *continuo numérico*. La expresión “continuo numérico” puede parecer un oxímoron, esto es, una combinación de dos palabras con significados opuestos y, en cierto sentido, es así. Los números sirven para contar grupos de cosas de igual naturaleza; por ejemplo árboles, o lo que quiera que sea, pero cada una de ellas con su propia individualidad, separadas entre sí, cosas que no tiene sentido dividir porque al hacerlo pierden su naturaleza. Todo esto se resume diciendo que los números tienen un carácter *discreto*. Los números siempre fueron considerados como lo opuesto del continuo.

La oposición continuo – discreto ha ocupado a los filósofos desde hace 2500 años y tiene como primeros representantes respectivos a Parménides (*c.* 510 - 450 a.C.) y a Demócrito (*c.* 460 - 370 a.C.).

La oposición continuo – discreto ha ocupado a los filósofos desde hace 2500 años y tiene como primeros representantes respectivos a Parménides (*c.* 510 - 450 a.C.) y a Demócrito (*c.* 460 - 370 a.C.).

Parménides, el filósofo más famoso de la Escuela Eleática, afirma en su hermoso poema *Sobre la Naturaleza*, que lo que Es, el Ser, es uno, ingénito, homogéneo, continuo, indivisible e inmutable. Este concepto del Ser excluye toda posibilidad de nueva generación de seres o sustancias y, por tanto, el cambio y el movimiento son mera ilusión, porque ambos presuponen que lo que no es pueda llegar a ser.

La oposición continuo – discreto ha ocupado a los filósofos desde hace 2500 años y tiene como primeros representantes respectivos a Parménides (*c.* 510 - 450 a.C.) y a Demócrito (*c.* 460 - 370 a.C.).

Parménides, el filósofo más famoso de la Escuela Eleática, afirma en su hermoso poema *Sobre la Naturaleza*, que lo que Es, el Ser, es uno, ingénito, homogéneo, continuo, indivisible e inmutable. Este concepto del Ser excluye toda posibilidad de nueva generación de seres o sustancias y, por tanto, el cambio y el movimiento son mera ilusión, porque ambos presuponen que lo que no es pueda llegar a ser.

Demócrito es el representante más conocido de la Escuela Atomista cuyo materialismo se opone al idealismo de la Escuela Eleática. Demócrito mantiene que el universo está compuesto de pequeños corpúsculos invisibles, los "átomos", que pueden poseer diferentes formas y extensiones y que por movimientos y combinaciones diversas en el vacío engendran la totalidad de lo existente.

Zenón de Elea, discípulo de Parménides, es famoso por sus *aporías*, en las que trata de probar que tanto si el espacio o el tiempo son infinitamente divisibles, como si no lo son, el movimiento no existe o es imposible. Las aporías de Zenón son un extraordinario desafío, al que filósofos y matemáticos han dado diversas respuestas, sin que aún hoy se tenga conciencia clara de haberlas podido explicar de forma totalmente convincente.

Zenón de Elea, discípulo de Parménides, es famoso por sus *aporías*, en las que trata de probar que tanto si el espacio o el tiempo son infinitamente divisibles, como si no lo son, el movimiento no existe o es imposible. Las aporías de Zenón son un extraordinario desafío, al que filósofos y matemáticos han dado diversas respuestas, sin que aún hoy se tenga conciencia clara de haberlas podido explicar de forma totalmente convincente.

Según Aristóteles, los atomistas preguntaban, en el supuesto de que una magnitud sea infinitamente divisible, qué es lo que quedaba de ella después de haberla sometido a un proceso de división exhaustivo. Y decían, si queda algo como polvo, es porque todavía no se ha completado el proceso de división, y si lo que queda son puntos o algo sin extensión, ¿cómo es posible recomponer una magnitud extensa con algo que no tiene extensión? Según ellos, la respuesta eran los átomos. La palabra griega "átomos" significa "lo que no puede dividirse", por tanto, la Escuela Atomista negaba la infinita divisibilidad de la materia y afirmaba que cualquier magnitud contiene elementos indivisibles.

De la oposición continuo – discreto siguieron ocupándose los filósofos de la Antigüedad, Platón (*c.* 427 - 347 a.C.), Aristóteles (384 - 322a.C.), Epicuro (341 - 270 a.C.); y de la Edad Media Duns Scoto (*c.* 1266 - 1308), Guillermo de Ockham (*c.* 1280 - 1349), Nicolás de Cusa (1401 - 1464), entre otros. Éste último, en una supuesta demostración de la cuadratura del círculo, consideró una circunferencia como un polígono regular de infinitos lados. La idea de considerar que una curva está formado por infinitos segmentos infinitesimales de línea recta fue usada, entre otros, por Kepler, Galileo y Leibniz y está recogida en el libro de Guillaume de L'Hôpital *Analyse des Infiniment Petits pour lÍntelligence des Lignes Courbes* (1696) al cual ya nos hemos referido anteriormente.

De la oposición continuo – discreto siguieron ocupándose los filósofos de la Antigüedad, Platón (*c.* 427 - 347 a.C.), Aristóteles (384 - 322a.C.), Epicuro (341 - 270 a.C.); y de la Edad Media Duns Scoto (*c.* 1266 - 1308), Guillermo de Ockham (*c.* 1280 - 1349), Nicolás de Cusa (1401 - 1464), entre otros. Éste último, en una supuesta demostración de la cuadratura del círculo, consideró una circunferencia como un polígono regular de infinitos lados. La idea de considerar que una curva está formado por infinitos segmentos infinitesimales de línea recta fue usada, entre otros, por Kepler, Galileo y Leibniz y está recogida en el libro de Guillaume de L'Hôpital *Analyse des Infiniment Petits pour lÍntelligence des Lignes Courbes* (1696) al cual ya nos hemos referido anteriormente.

A finales del siglo XVII, con el invento del Cálculo, resurgió la oposición entre lo continuo y lo discreto, esta vez centrada en el concepto de cantidad infinitesimal. Algunos consideraban los infinitésimos como algo real, infinitamente pequeño, parecido a los átomos de Demócrito, salvo que ahora su número era infinito. La integración se consideraba como una suma infinita de estos infinitésimos. Una diferencial de una cantidad variable era un incremento infinitesimal de dicha variable, y un cociente o una razón de diferenciales "en el momento en que se anulan", lo que Newton llamaba *cantidades evanescentes*, era lo que ahora llamamos una derivada, y Newton llamaba una *fluxión*.

El uso de los infinitésimos en el Cálculo demostraba ser muy eficaz y, aunque a algunos, como al mismo Newton, les hubiera gustado evitarlo, lo cierto es que no se sabía bien cómo hacerlo. Lo peor de todo, no es que el mero concepto de infinitésimo sea de por sí difícilmente sostenible, sino la forma en que los infinitésimos se manejaban en los cálculos.

El uso de los infinitésimos en el Cálculo demostraba ser muy eficaz y, aunque a algunos, como al mismo Newton, les hubiera gustado evitarlo, lo cierto es que no se sabía bien cómo hacerlo. Lo peor de todo, no es que el mero concepto de infinitésimo sea de por sí difícilmente sostenible, sino la forma en que los infinitésimos se manejaban en los cálculos.Podemos destacar dos características.

- Con los infinitésimos podía operarse como con cantidades finitas no nulas y, en particular, podía dividirse por ellos.

El uso de los infinitésimos en el Cálculo demostraba ser muy eficaz y, aunque a algunos, como al mismo Newton, les hubiera gustado evitarlo, lo cierto es que no se sabía bien cómo hacerlo. Lo peor de todo, no es que el mero concepto de infinitésimo sea de por sí difícilmente sostenible, sino la forma en que los infinitésimos se manejaban en los cálculos.Podemos destacar dos características.

- Con los infinitésimos podía operarse como con cantidades finitas no nulas y, en particular, podía dividirse por ellos.
- Los infinitésimos podían ser tratados como cantidades nulas. Así, si x es una cantidad positiva y o un infinitésimo, entonces $x + o = x$.

El uso de los infinitésimos en el Cálculo demostraba ser muy eficaz y, aunque a algunos, como al mismo Newton, les hubiera gustado evitarlo, lo cierto es que no se sabía bien cómo hacerlo. Lo peor de todo, no es que el mero concepto de infinitésimo sea de por sí difícilmente sostenible, sino la forma en que los infinitésimos se manejaban en los cálculos.Podemos destacar dos características.

- Con los infinitésimos podía operarse como con cantidades finitas no nulas y, en particular, podía dividirse por ellos.
- Los infinitésimos podían ser tratados como cantidades nulas. Así, si x es una cantidad positiva y o un infinitésimo, entonces $x+o=x$.

El uso de los infinitésimos en el Cálculo demostraba ser muy eficaz y, aunque a algunos, como al mismo Newton, les hubiera gustado evitarlo, lo cierto es que no se sabía bien cómo hacerlo. Lo peor de todo, no es que el mero concepto de infinitésimo sea de por sí difícilmente sostenible, sino la forma en que los infinitésimos se manejaban en los cálculos.Podemos destacar dos características.

- Con los infinitésimos podía operarse como con cantidades finitas no nulas y, en particular, podía dividirse por ellos.
- Los infinitésimos podían ser tratados como cantidades nulas. Así, si x es una cantidad positiva y o un infinitésimo, entonces $x + o = x$.

Dependiendo del tipo de cálculo eran tratados de una forma u otra. Además, había infinitésimos de primer orden despreciables frente a cantidades finitas; de segundo orden que eran despreciables frente a los de primer orden, y así sucesivamente. Para acabar de empeorar las cosas, los infinitésimos no respetaban la propiedad arquimediana, pues el producto de cualquier cantidad finita por un infinitésimo seguía siendo un infinitésimo.

Un ejemplo típico es el cálculo de la diferencial de un producto de dos cantidades x e y. Se razonaba como sigue.

Un ejemplo típico es el cálculo de la diferencial de un producto de dos cantidades x e y. Se razonaba como sigue.

Cuando x cambia a $x + \mathrm{d}x$, y cambia a $y + \mathrm{d}y$, por lo que xy se transforma en

$$(x + \mathrm{d}x)(y + \mathrm{d}y) = xy + x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Un ejemplo típico es el cálculo de la diferencial de un producto de dos cantidades x e y. Se razonaba como sigue.

Cuando x cambia a $x + \mathrm{d}x$, y cambia a $y + \mathrm{d}y$, por lo que xy se transforma en

$$(x + \mathrm{d}x)(y + \mathrm{d}y) = xy + x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Por lo que la diferencial de xy es

$$x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Un ejemplo típico es el cálculo de la diferencial de un producto de dos cantidades x e y. Se razonaba como sigue.

Cuando x cambia a $x + \mathrm{d}x$, y cambia a $y + \mathrm{d}y$, por lo que xy se transforma en

$$(x + \mathrm{d}x)(y + \mathrm{d}y) = xy + x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Por lo que la diferencial de xy es

$$x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Pero como $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ es una cantidad *infinitamente pequeña con respecto a los otros términos*, se sigue que la diferencial de xy es $x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x$.

Veamos otro ejemplo típico. Consideremos dos cantidades x, y relacionadas por $y - x^3 = 0$.

Veamos otro ejemplo típico. Consideremos dos cantidades x, y relacionadas por $y - x^3 = 0$.Cuando x cambia a $x + \mathrm{d}x$, y cambia a $y + \mathrm{d}y$, por lo que

$$0 = y + \mathrm{d}y - (x + \mathrm{d}x)^3 = y + \mathrm{d}y - x^3 - 3x^2\,\mathrm{d}x - 3x(\mathrm{d}x)^2 - (\mathrm{d}x)^3$$

Veamos otro ejemplo típico. Consideremos dos cantidades x, y relacionadas por $y - x^3 = 0$.Cuando x cambia a $x + \mathrm{d}x$, y cambia a $y + \mathrm{d}y$, por lo que

$$0 = y + \mathrm{d}y - (x + \mathrm{d}x)^3 = y + \mathrm{d}y - x^3 - 3x^2\,\mathrm{d}x - 3x(\mathrm{d}x)^2 - (\mathrm{d}x)^3$$

Teniendo en cuenta que $y - x^3 = 0$, deducimos:

$$\mathrm{d}y = 3x^2\,\mathrm{d}x + 3x(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}x)^3$$

Veamos otro ejemplo típico. Consideremos dos cantidades x, y relacionadas por $y - x^3 = 0$.Cuando x cambia a $x + \mathrm{d}x$, y cambia a $y + \mathrm{d}y$, por lo que

$$0 = y + \mathrm{d}y - (x + \mathrm{d}x)^3 = y + \mathrm{d}y - x^3 - 3x^2\,\mathrm{d}x - 3x(\,\mathrm{d}x)^2 - (\,\mathrm{d}x)^3$$

Teniendo en cuenta que $y - x^3 = 0$, deducimos:

$$\mathrm{d}y = 3x^2\,\mathrm{d}x + 3x(\,\mathrm{d}x)^2 + (\,\mathrm{d}x)^3$$

Dividiendo por $\mathrm{d}x$ la igualdad obtenida resulta:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 + 3x\,\mathrm{d}x + (\,\mathrm{d}x)^2$$

Veamos otro ejemplo típico. Consideremos dos cantidades x, y relacionadas por $y - x^3 = 0$.Cuando x cambia a $x + \mathrm{d}x$, y cambia a $y + \mathrm{d}y$, por lo que

$$0 = y + \mathrm{d}y - (x + \mathrm{d}x)^3 = y + \mathrm{d}y - x^3 - 3x^2\,\mathrm{d}x - 3x(\mathrm{d}x)^2 - (\mathrm{d}x)^3$$

Teniendo en cuenta que $y - x^3 = 0$, deducimos:

$$\mathrm{d}y = 3x^2\,\mathrm{d}x + 3x(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}x)^3$$

Dividiendo por $\mathrm{d}x$ la igualdad obtenida resulta:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 + 3x\,\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2$$

Y como $3x\,\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2$ es *infinitamente pequeño* respecto de $3x^2$, concluimos que $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2$.

Veamos otro ejemplo típico. Consideremos dos cantidades x, y relacionadas por $y - x^3 = 0$.Cuando x cambia a $x + \mathrm{d}x$, y cambia a $y + \mathrm{d}y$, por lo que

$$0 = y + \mathrm{d}y - (x + \mathrm{d}x)^3 = y + \mathrm{d}y - x^3 - 3x^2\,\mathrm{d}x - 3x(\mathrm{d}x)^2 - (\mathrm{d}x)^3$$

Teniendo en cuenta que $y - x^3 = 0$, deducimos:

$$\mathrm{d}y = 3x^2\,\mathrm{d}x + 3x(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}x)^3$$

Dividiendo por $\mathrm{d}x$ la igualdad obtenida resulta:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 + 3x\,\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2$$

Y como $3x\,\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2$ es *infinitamente pequeño* respecto de $3x^2$, concluimos que $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2$.

En lenguaje actual, lo que hemos hecho es calcular la derivada de la función $f(x) = x^3$. Y... ¡el resultado es correcto! A pesar de que hemos dividido por una cantidad que después hemos hecho igual a cero.

En 1734 el filósofo George Berkeley (1685 - 1753) publicó una obra cuyo título es *El analista, o discurso dirigido a un matemático infiel, donde se examina si el objeto, principios e inferencias del análisis moderno están formulados de manera más clara, o deducidos de manera más evidente, que los misterios de la religión y las cuestiones de la fe*.

En 1734 el filósofo George Berkeley (1685 - 1753) publicó una obra cuyo título es *El analista, o discurso dirigido a un matemático infiel, donde se examina si el objeto, principios e inferencias del análisis moderno están formulados de manera más clara, o deducidos de manera más evidente, que los misterios de la religión y las cuestiones de la fe*.

En dicha obra Berkeley, que fue obispo anglicano de Cloyne, hace una crítica de los fundamentos del Cálculo que tuvo una gran influencia. Afirmaba Berkeley que si se acepta que el Cálculo puede alcanzar soluciones exactas por medio de razonamientos erróneos, entonces debe admitirse que la fe puede alcanzar la verdad por vías místicas.

En 1734 el filósofo George Berkeley (1685 - 1753) publicó una obra cuyo título es *El analista, o discurso dirigido a un matemático infiel, donde se examina si el objeto, principios e inferencias del análisis moderno están formulados de manera más clara, o deducidos de manera más evidente, que los misterios de la religión y las cuestiones de la fe*.

En dicha obra Berkeley, que fue obispo anglicano de Cloyne, hace una crítica de los fundamentos del Cálculo que tuvo una gran influencia. Afirmaba Berkeley que si se acepta que el Cálculo puede alcanzar soluciones exactas por medio de razonamientos erróneos, entonces debe admitirse que la fe puede alcanzar la verdad por vías místicas.

Es famoso su comentario:

> *¿Qué son las fluxiones? Las velocidades de incrementos evanescentes. Y ¿qué son estos mismos incrementos evanescentes? Ellos no son ni cantidades finitas, ni cantidades infinitamente pequeñas, ni siquiera son nada. ¿No las podríamos llamar los fantasmas de las cantidades desaparecidas?*

En 1734 el filósofo George Berkeley (1685 - 1753) publicó una obra cuyo título es *El analista, o discurso dirigido a un matemático infiel, donde se examina si el objeto, principios e inferencias del análisis moderno están formulados de manera más clara, o deducidos de manera más evidente, que los misterios de la religión y las cuestiones de la fe*.

En dicha obra Berkeley, que fue obispo anglicano de Cloyne, hace una crítica de los fundamentos del Cálculo que tuvo una gran influencia. Afirmaba Berkeley que si se acepta que el Cálculo puede alcanzar soluciones exactas por medio de razonamientos erróneos, entonces debe admitirse que la fe puede alcanzar la verdad por vías místicas.

Es famoso su comentario:

> *¿Qué son las fluxiones? Las velocidades de incrementos evanescentes. Y ¿qué son estos mismos incrementos evanescentes? Ellos no son ni cantidades finitas, ni cantidades infinitamente pequeñas, ni siquiera son nada. ¿No las podríamos llamar los fantasmas de las cantidades desaparecidas?*

Los embrollos en que andaban metidos los matemáticos se reflejan en la novela de Jonathan Swift *Los viajes de Gulliver* (1726) donde aparecen los diminutos enanos de Lilliput y los enormes gigantes de Brobdingnag, y en la narración corta *Micromegas* (1752) de Voltaire.

La realidad es que los matemáticos del siglo XVIII, y hasta bien entrado el siglo XIX, estaban mucho más interesados en desarrollar y aplicar las técnicas del Cálculo, que en ocuparse de problemas de fundamentos. Entre los principales matemáticos de esta época hay que citar a Leonard Euler (1707 - 1783), Jean d'Alembert (1717 - 1783), Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813), Pierre-Simon Laplace (1749 - 1827), Joseph Fourier (1768 - 1830), Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855).

La realidad es que los matemáticos del siglo XVIII, y hasta bien entrado el siglo XIX, estaban mucho más interesados en desarrollar y aplicar las técnicas del Cálculo, que en ocuparse de problemas de fundamentos. Entre los principales matemáticos de esta época hay que citar a Leonard Euler (1707 - 1783), Jean d'Alembert (1717 - 1783), Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813), Pierre-Simon Laplace (1749 - 1827), Joseph Fourier (1768 - 1830), Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855).

El espíritu de los tiempos, el Siglo de las Luces, queda bien reflejado en la siguiente frase.

> *Todos los efectos de la naturaleza son tan sólo las consecuencias matemáticas de un pequeño número de leyes inmutables.* *Laplace*

La realidad es que los matemáticos del siglo XVIII, y hasta bien entrado el siglo XIX, estaban mucho más interesados en desarrollar y aplicar las técnicas del Cálculo, que en ocuparse de problemas de fundamentos. Entre los principales matemáticos de esta época hay que citar a Leonard Euler (1707 - 1783), Jean d'Alembert (1717 - 1783), Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813), Pierre-Simon Laplace (1749 - 1827), Joseph Fourier (1768 - 1830), Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855).

El espíritu de los tiempos, el Siglo de las Luces, queda bien reflejado en la siguiente frase.

> *Todos los efectos de la naturaleza son tan sólo las consecuencias matemáticas de un pequeño número de leyes inmutables.* *Laplace*

En el primer tercio del siglo XIX, el ideal de Newton de "someter los fenómenos de la Naturaleza a las leyes matemáticas", podía considerarse esencialmente realizado.

Llegamos así al siglo XIX que, en cuanto a matemáticas se refiere, ha sido llamado el Siglo del Rigor. Veamos cómo se entendían en los primeros años de dicho siglo los conceptos básicos del Cálculo.

Llegamos así al siglo XIX que, en cuanto a matemáticas se refiere, ha sido llamado el Siglo del Rigor. Veamos cómo se entendían en los primeros años de dicho siglo los conceptos básicos del Cálculo.

- Concepto de función. No existía tal como lo entendemos en la actualidad. En vez de funciones, se consideraban relaciones entre variables, es decir, ecuaciones. Las correspondencias entre variables se interpretaban en términos geométricos. No existía la idea del dominio de una variable.

Llegamos así al siglo XIX que, en cuanto a matemáticas se refiere, ha sido llamado el Siglo del Rigor. Veamos cómo se entendían en los primeros años de dicho siglo los conceptos básicos del Cálculo.

- Concepto de función. No existía tal como lo entendemos en la actualidad. En vez de funciones, se consideraban relaciones entre variables, es decir, ecuaciones. Las correspondencias entre variables se interpretaban en términos geométricos. No existía la idea del dominio de una variable.
- Concepto de continuidad. El concepto de continuidad puntual no había sido siquiera formulado matemáticamente. La idea de Euler de función continua, como aquella que está definida por una única expresión analítica, era todo lo que había.

Llegamos así al siglo XIX que, en cuanto a matemáticas se refiere, ha sido llamado el Siglo del Rigor. Veamos cómo se entendían en los primeros años de dicho siglo los conceptos básicos del Cálculo.

- Concepto de función. No existía tal como lo entendemos en la actualidad. En vez de funciones, se consideraban relaciones entre variables, es decir, ecuaciones. Las correspondencias entre variables se interpretaban en términos geométricos. No existía la idea del dominio de una variable.
- Concepto de continuidad. El concepto de continuidad puntual no había sido siquiera formulado matemáticamente. La idea de Euler de función continua, como aquella que está definida por una única expresión analítica, era todo lo que había.
- Concepto de límite. Solamente se tenían algunas ideas confusas agravadas por el uso de los infinitésimos. Los infinitésimos empezaban a considerarse como variables con límite cero.

Llegamos así al siglo XIX que, en cuanto a matemáticas se refiere, ha sido llamado el Siglo del Rigor. Veamos cómo se entendían en los primeros años de dicho siglo los conceptos básicos del Cálculo.

- Concepto de función. No existía tal como lo entendemos en la actualidad. En vez de funciones, se consideraban relaciones entre variables, es decir, ecuaciones. Las correspondencias entre variables se interpretaban en términos geométricos. No existía la idea del dominio de una variable.
- Concepto de continuidad. El concepto de continuidad puntual no había sido siquiera formulado matemáticamente. La idea de Euler de función continua, como aquella que está definida por una única expresión analítica, era todo lo que había.
- Concepto de límite. Solamente se tenían algunas ideas confusas agravadas por el uso de los infinitésimos. Los infinitésimos empezaban a considerarse como variables con límite cero.
- Concepto de número. La idea de cantidad abstracta variable, a la que podían asignarse valores concretos, no había experimentado cambios notables en casi un siglo. Los números complejos ya eran aceptados, gracias a los trabajos de Euler y, sobre todo, de Gauss, pero seguía sin tenerse una idea clara de los números irracionales, y prevalecía una interpretación geométrica de los mismos.

Esta situación iba a cambiar gracias principalmente a los trabajos de Bernad Bolzano (1781 - 1848), Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) y Karl Weierstrass (1815 - 1897) de los que nos ocuparemos al estudiar la formalización del concepto de límite. Ahora quiero detenerme solamente en la evolución de la idea de número real.

Esta situación iba a cambiar gracias principalmente a los trabajos de Bernad Bolzano (1781 - 1848), Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) y Karl Weierstrass (1815 - 1897) de los que nos ocuparemos al estudiar la formalización del concepto de límite. Ahora quiero detenerme solamente en la evolución de la idea de número real.

A los tres matemáticos citados hay que agregar los nombres de Richard Dedekind (1831 - 1916) y George Cantor (1845 - 1918), fueron ellos quienes desarrollaron la teoría de los números reales.

Es lógico preguntarse por qué esto no se hizo antes. Pueden darse varias razones para ello.

Es lógico preguntarse por qué esto no se hizo antes. Pueden darse varias razones para ello.

- En el siglo XVIII las matemáticas son consideradas una Ciencia de la Naturaleza. Las teorías matemáticas deben reflejar la realidad física. Las matemáticas son una herramienta para formular y descubrir las Leyes de la Naturaleza. Las teorías matemáticas no se inventan, se descubren.

Es lógico preguntarse por qué esto no se hizo antes. Pueden darse varias razones para ello.

- En el siglo XVIII las matemáticas son consideradas una Ciencia de la Naturaleza. Las teorías matemáticas deben reflejar la realidad física. Las matemáticas son una herramienta para formular y descubrir las Leyes de la Naturaleza. Las teorías matemáticas no se inventan, se descubren.
- Los números reales estaban asociados con magnitudes y se interpretaban geométricamente. Eran algo dado en la realidad física. A los matemáticos del siglo XVIII no les pareció necesario dar una definición matemática de los mismos.

Es lógico preguntarse por qué esto no se hizo antes. Pueden darse varias razones para ello.

- En el siglo XVIII las matemáticas son consideradas una Ciencia de la Naturaleza. Las teorías matemáticas deben reflejar la realidad física. Las matemáticas son una herramienta para formular y descubrir las Leyes de la Naturaleza. Las teorías matemáticas no se inventan, se descubren.
- Los números reales estaban asociados con magnitudes y se interpretaban geométricamente. Eran algo dado en la realidad física. A los matemáticos del siglo XVIII no les pareció necesario dar una definición matemática de los mismos.
- Observa que para precisar un número como $\sqrt{2}$ debes dar todas sus cifras decimales en su orden, es decir, un vector de infinitas componentes. Fíjate también que la condición dada por Eudoxo (1) para comparar razones inconmensurables hace intervenir a *todos* los números naturales. Esto no es casual. La idea de número irracional lleva consigo asociada la de infinito. Hasta que no se elaboraron los fundamentos de una teoría matemática del infinito, no pudo desarrollarse una teoría satisfactoria de los números reales.

En el siglo XVIII las definiciones matemáticas eran descriptivas; no creaban objetos matemáticos sino que describían algo que se suponía debía imitar una realidad externa. Por la misma razón, no podían inventarse reglas para operar con los objetos matemáticos. Las reglas había que descubrirlas, pero no podían elegirse libremente. Se consideraba que la Naturaleza imponía unas normas que las Matemáticas de alguna manera debían imitar, no se era libre para inventar una teoría matemática. La idea de una Matemática como juego lógico formal era algo impensable en el siglo XVIII.

En el siglo XVIII las definiciones matemáticas eran descriptivas; no creaban objetos matemáticos sino que describían algo que se suponía debía imitar una realidad externa. Por la misma razón, no podían inventarse reglas para operar con los objetos matemáticos. Las reglas había que descubrirlas, pero no podían elegirse libremente. Se consideraba que la Naturaleza imponía unas normas que las Matemáticas de alguna manera debían imitar, no se era libre para inventar una teoría matemática. La idea de una Matemática como juego lógico formal era algo impensable en el siglo XVIII.

La idea que los matemáticos tenían de su Ciencia cambió de forma radical como consecuencia de la invención en el siglo XIX de las geometrías no euclídeas por Janos Bolyai (1802 - 1860) y Nikolai I. Lobachevsky (1792 - 1856). Con la aparición de las geometrías no euclídeas, se han ido introduciendo en matemáticas nuevos conceptos y desarrollos que no tienen una contrapartida inmediata en el mundo real.

Quedó claro a partir de entonces que las matemáticas no son una Ciencia de la Naturaleza, que la definición usual de las matemáticas como la ciencia que estudia la cantidad y la forma es inadecuada, y pasó a considerarse que la matemática es la ciencia que obtiene conclusiones lógicas de sistemas axiomáticos. Las matemáticas son, pues, una ciencia puramente deductiva.

Quedó claro a partir de entonces que las matemáticas no son una Ciencia de la Naturaleza, que la definición usual de las matemáticas como la ciencia que estudia la cantidad y la forma es inadecuada, y pasó a considerarse que la matemática es la ciencia que obtiene conclusiones lógicas de sistemas axiomáticos. Las matemáticas son, pues, una ciencia puramente deductiva.

Una teoría matemática es un conjunto de axiomas que contienen ciertos términos indefinidos, y un sistema de reglas de inferencia lógica. El papel que juegan las definiciones en una teoría matemática consiste en crear nuevos objetos matemáticos y precisar su significado en dicha teoría. Todos los objetos que se estudian en una teoría matemática, o bien son términos indefinidos de dicha teoría o son objetos creados por medio de definiciones que remiten a los axiomas. En el XVIII los números reales son algo dado y externo que las matemáticas deben explicar, al final del XIX los números serán algo completamente diferente.

La idea de número real es el soporte de otras ideas básicas del Cálculo como las de continuidad y límite. Los procesos de convergencia dependen de la propiedad de completitud de los números reales. Por todo ello, los matemáticos eran cada vez más conscientes de que los progresos del Cálculo dependían de un mejor conocimiento de los mismos.

La idea de número real es el soporte de otras ideas básicas del Cálculo como las de continuidad y límite. Los procesos de convergencia dependen de la propiedad de completitud de los números reales. Por todo ello, los matemáticos eran cada vez más conscientes de que los progresos del Cálculo dependían de un mejor conocimiento de los mismos.

A mediados del siglo XIX no era posible demostrar algunos resultados básicos del cálculo; por ejemplo, que toda función creciente y acotada tiene límite, o el teorema del valor intermedio para funciones continuas.

La idea de número real es el soporte de otras ideas básicas del Cálculo como las de continuidad y límite. Los procesos de convergencia dependen de la propiedad de completitud de los números reales. Por todo ello, los matemáticos eran cada vez más conscientes de que los progresos del Cálculo dependían de un mejor conocimiento de los mismos.

A mediados del siglo XIX no era posible demostrar algunos resultados básicos del cálculo; por ejemplo, que toda función creciente y acotada tiene límite, o el teorema del valor intermedio para funciones continuas.

Ello se debía a que faltaba codificar matemáticamente una propiedad fundamental de los números reales, la que ahora llamamos *completitud* y entonces se llamaba *propiedad de continuidad*.

La idea de número real es el soporte de otras ideas básicas del Cálculo como las de continuidad y límite. Los procesos de convergencia dependen de la propiedad de completitud de los números reales. Por todo ello, los matemáticos eran cada vez más conscientes de que los progresos del Cálculo dependían de un mejor conocimiento de los mismos.

A mediados del siglo XIX no era posible demostrar algunos resultados básicos del cálculo; por ejemplo, que toda función creciente y acotada tiene límite, o el teorema del valor intermedio para funciones continuas.

Ello se debía a que faltaba codificar matemáticamente una propiedad fundamental de los números reales, la que ahora llamamos *completitud* y entonces se llamaba *propiedad de continuidad*.

En 1872 se publicaron dos trabajos, uno de Cantor y otro de Dedekind, en los que, tomando como punto de partida el sistema de los números racionales, cada autor desarrollaba una construcción matemática de los números reales. Nos vamos a ocupar aquí del trabajo de Dedekind, titulado *Continuidad y números irracionales*. En dicho trabajo, Dedekind manifiesta su propósito de reducir los números reales a la aritmética, eliminando así todo contenido geométrico en la idea de número real. Para explicar lo que él hizo vamos a partir de la intuición de una recta.

Figura. Dedekind

Una recta es un ejemplo claro de continuidad. Elegido un punto como origen y un segmento como unidad, podemos hacer corresponder a cada número racional un punto de esa recta. Ya hemos visto, al hablar de las magnitudes inconmensurables, que los números racionales no agotan todos los puntos de la recta; cualquier punto que corresponda con un segmento de longitud inconmensurable con la unidad elegida no puede ser representado por un número racional, es decir, en la recta racional hay “huecos”. Por tanto, los números racionales no son suficientes para describir numéricamente “el continuo”.

Se pregunta Dedekind:

> *¿En qué consiste esta continuidad? Todo depende de la respuesta a esta pregunta, y solamente a través de ella obtendremos una base científica para la investigación de todos los dominios continuos. Con vagas observaciones sobre la unión sin rotura de las partes más pequeñas, obviamente nada se gana; el problema es indicar una característica precisa de la continuidad que pueda servir como base para deducciones válidas. Durante largo tiempo he meditado sobre esto en vano, pero finalmente he encontrado lo que pretendía.*

Se pregunta Dedekind:

> *¿En qué consiste esta continuidad? Todo depende de la respuesta a esta pregunta, y solamente a través de ella obtendremos una base científica para la investigación de todos los dominios continuos. Con vagas observaciones sobre la unión sin rotura de las partes más pequeñas, obviamente nada se gana; el problema es indicar una característica precisa de la continuidad que pueda servir como base para deducciones válidas. Durante largo tiempo he meditado sobre esto en vano, pero finalmente he encontrado lo que pretendía.*

Dedekind se dispone a revelar el secreto, pero como su idea además de ser genial es muy sencilla, previene al lector con esta observación.

> *Muchos de mis lectores quedarán grandemente disgustados al saber que por esta vulgar observación se revela el secreto de la continuidad.*

¿Cuál es esa *vulgar* observación? Vamos a explicarla. Todo punto en una recta R la divide en dos partes disjuntas, la parte A, formada por los puntos de la recta que están a su izquierda, y la parte B, formada por los puntos de la recta que están a su derecha. El propio punto podemos incluirlo bien en A o en B. Dice Dedekind:

¿Cuál es esa *vulgar* observación? Vamos a explicarla. Todo punto en una recta R la divide en dos partes disjuntas, la parte A, formada por los puntos de la recta que están a su izquierda, y la parte B, formada por los puntos de la recta que están a su derecha. El propio punto podemos incluirlo bien en A o en B. Dice Dedekind:

> *He encontrado la esencia de la continuidad en el recíproco, es decir, en el siguiente principio:"Si todos los puntos de la recta se dividen en dos clases tales que todo punto de la primera clase queda a la izquierda de todo punto de la segunda clase, entonces existe un, y sólo un punto, que produce esta división de todos los puntos en dos clases, esta escisión de la línea recta en dos partes."*

¿Cuál es esa *vulgar* observación? Vamos a explicarla. Todo punto en una recta R la divide en dos partes disjuntas, la parte A, formada por los puntos de la recta que están a su izquierda, y la parte B, formada por los puntos de la recta que están a su derecha. El propio punto podemos incluirlo bien en A o en B. Dice Dedekind:

> *He encontrado la esencia de la continuidad en el recíproco, es decir, en el siguiente principio:"Si todos los puntos de la recta se dividen en dos clases tales que todo punto de la primera clase queda a la izquierda de todo punto de la segunda clase, entonces existe un, y sólo un punto, que produce esta división de todos los puntos en dos clases, esta escisión de la línea recta en dos partes."*

Las ideas geniales, que además son sencillas, son doblemente geniales. Igual que el tiempo es continuo porque entre dos instantes de tiempo solamente hay tiempo, la recta es continua porque entre dos puntos de ella solamente hay puntos de la misma recta. Es esta la idea que Dedekind ha sabido expresar matemáticamente de una forma insuperable.

Para entenderla un poco mejor, vamos a considerar el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales como puntos de una recta en la que hemos elegido un origen y una unidad, la recta racional.

Para entenderla un poco mejor, vamos a considerar el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales como puntos de una recta en la que hemos elegido un origen y una unidad, la recta racional.

Definición. Una *cortadura* de $\mathbb{Q}$ es un par (A,B), donde A y B son conjuntos no vacíos de números racionales tales que $\mathbb{Q} = A \cup B$, y todo número de A es menor que todo número de B y A no tiene máximo.

Para entenderla un poco mejor, vamos a considerar el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales como puntos de una recta en la que hemos elegido un origen y una unidad, la recta racional.

Definición. Una *cortadura* de $\mathbb{Q}$ es un par (A, B), donde A y B son conjuntos no vacíos de números racionales tales que $\mathbb{Q} = A \cup B$, y todo número de A es menor que todo número de B y A no tiene máximo.

Todo número racional $r \in \mathbb{Q}$ produce una cortadura dada por

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x < r\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{Q} : r \geqslant x\}$$

Para entenderla un poco mejor, vamos a considerar el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales como puntos de una recta en la que hemos elegido un origen y una unidad, la recta racional.

Definición. Una *cortadura* de $\mathbb{Q}$ es un par (A,B), donde A y B son conjuntos no vacíos de números racionales tales que $\mathbb{Q} = A \cup B$, y todo número de A es menor que todo número de B y A no tiene máximo.

Todo número racional $r \in \mathbb{Q}$ produce una cortadura dada por

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x < r\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{Q} : r \geqslant x\}$$

Pero en la recta racional hay muchas cortaduras que no están producidas por números racionales. Es un sencillo ejercicio probar que los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x \leqslant 0 \ \text{ o } \ x^2 < 2\}, \ \ B = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \ \text{ y } \ x^2 \geqslant 2\}$$

definen una cortadura de $\mathbb{Q}$ que no está producida por ningún número racional.

Para entenderla un poco mejor, vamos a considerar el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales como puntos de una recta en la que hemos elegido un origen y una unidad, la recta racional.

Definición. Una *cortadura* de $\mathbb{Q}$ es un par (A, B), donde A y B son conjuntos no vacíos de números racionales tales que $\mathbb{Q} = A \cup B$, y todo número de A es menor que todo número de B y A no tiene máximo.

Todo número racional $r \in \mathbb{Q}$ produce una cortadura dada por

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x < r\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{Q} : r \geqslant x\}$$

Pero en la recta racional hay muchas cortaduras que no están producidas por números racionales. Es un sencillo ejercicio probar que los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x \leqslant 0 \ \text{ o } \ x^2 < 2\}, \ \ B = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \ \text{ y } \ x^2 \geqslant 2\}$$

definen una cortadura de $\mathbb{Q}$ que no está producida por ningún número racional.

De hecho, si te imaginas la recta racional dentro de la recta real, y tomas un número α que sea irracional, los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x < \alpha\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{Q} : r > \alpha\}$$

De hecho, si te imaginas la recta racional dentro de la recta real, y tomas un número α que sea irracional, los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x < \alpha\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{Q} : r > \alpha\}$$

Definen una cortadura de $\mathbb{Q}$ que no está producida por ningún número racional. Es decir, considerando $\mathbb{Q}$ dentro de $\mathbb{R}$, vemos que cada cortadura de $\mathbb{Q}$ está determinada por un punto que puede ser racional o irracional.

De hecho, si te imaginas la recta racional dentro de la recta real, y tomas un número α que sea irracional, los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x < \alpha\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{Q} : r > \alpha\}$$

Definen una cortadura de $\mathbb{Q}$ que no está producida por ningún número racional. Es decir, considerando $\mathbb{Q}$ dentro de $\mathbb{R}$, vemos que cada cortadura de $\mathbb{Q}$ está determinada por un punto que puede ser racional o irracional.

Pero claro, *está prohibido usar la recta real cuando lo que queremos es justamente construirla a partir de* $\mathbb{Q}$. ¿De dónde sacamos los números reales si todo lo que tenemos son los racionales? Esta es la idea genial de Dedekind.

De hecho, si te imaginas la recta racional dentro de la recta real, y tomas un número α que sea irracional, los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x < \alpha\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{Q} : r > \alpha\}$$

Definen una cortadura de $\mathbb{Q}$ que no está producida por ningún número racional. Es decir, considerando $\mathbb{Q}$ dentro de $\mathbb{R}$, vemos que cada cortadura de $\mathbb{Q}$ está determinada por un punto que puede ser racional o irracional.

Pero claro, *está prohibido usar la recta real cuando lo que queremos es justamente construirla a partir de* $\mathbb{Q}$. ¿De dónde sacamos los números reales si todo lo que tenemos son los racionales? Esta es la idea genial de Dedekind.

Definición. Un número real es una cortadura de $\mathbb{Q}$.

De hecho, si te imaginas la recta racional dentro de la recta real, y tomas un número α que sea irracional, los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x < \alpha\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{Q} : r > \alpha\}$$

Definen una cortadura de $\mathbb{Q}$ que no está producida por ningún número racional. Es decir, considerando $\mathbb{Q}$ dentro de $\mathbb{R}$, vemos que cada cortadura de $\mathbb{Q}$ está determinada por un punto que puede ser racional o irracional.

Pero claro, *está prohibido usar la recta real cuando lo que queremos es justamente construirla a partir de* $\mathbb{Q}$. ¿De dónde sacamos los números reales si todo lo que tenemos son los racionales? Esta es la idea genial de Dedekind.

Definición. Un número real es una cortadura de $\mathbb{Q}$.

El conjunto de todos los números reales se representa por $\mathbb{R}$. Observa el papel que desempeñan las definiciones en una teoría matemática: crean nuevos objetos de la teoría. La definición anterior dice lo que es un número real en términos exclusivamente de números racionales.

Vuelve ahora a leer la definición de Eudoxo (1) para la igualdad de razones inconmensurables. ¡Lo que dice (1) es que dos razones inconmensurables son iguales si producen una misma cortadura en $\mathbb{Q}$!

Vuelve ahora a leer la definición de Eudoxo (1) para la igualdad de razones inconmensurables. ¡Lo que dice (1) es que dos razones inconmensurables son iguales si producen una misma cortadura en $\mathbb{Q}$!

Los números racionales se construyen a partir del conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros, y éstos se obtienen fácilmente a partir de los naturales. Dedekind y Giuseppe Peano establecieron una base axiomática para el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales.

Vuelve ahora a leer la definición de Eudoxo (1) para la igualdad de razones inconmensurables. ¡Lo que dice (1) es que dos razones inconmensurables son iguales si producen una misma cortadura en $\mathbb{Q}$!

Los números racionales se construyen a partir del conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros, y éstos se obtienen fácilmente a partir de los naturales. Dedekind y Giuseppe Peano establecieron una base axiomática para el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales.

Ya ves, al final, Pitágoras ha regresado: todo es número.

Supongo lo que estás pensando: “¡Vaya definición extraña de número real! Ahora resulta que un número es una cortadura. . . ¡nada menos que dos conjuntos infinitos de números!”. Vayamos poco a poco.

Supongo lo que estás pensando: "¡Vaya definición extraña de número real! Ahora resulta que un número es una cortadura. . . ¡nada menos que dos conjuntos infinitos de números!". Vayamos poco a poco.

- Es una definición operativa, es decir, permite definir la suma y el producto de números reales, así como la relación de orden y demostrar que verifican las propiedades que definen un cuerpo ordenado completo. Además, todo esto se hace de forma sencilla aunque laboriosa.

Supongo lo que estás pensando: "¡Vaya definición extraña de número real! Ahora resulta que un número es una cortadura. . . ¡nada menos que dos conjuntos infinitos de números!". Vayamos poco a poco.

- Es una definición operativa, es decir, permite definir la suma y el producto de números reales, así como la relación de orden y demostrar que verifican las propiedades que definen un cuerpo ordenado completo. Además, todo esto se hace de forma sencilla aunque laboriosa.
- Lo importante de la definición es que define los números reales solamente usando los números racionales. Es decir, resuelve un problema de *existencia* en sentido matemático.

Supongo lo que estás pensando: “¡Vaya definición extraña de número real! Ahora resulta que un número es una cortadura. . . ¡nada menos que dos conjuntos infinitos de números!”. Vayamos poco a poco.

- Es una definición operativa, es decir, permite definir la suma y el producto de números reales, así como la relación de orden y demostrar que verifican las propiedades que definen un cuerpo ordenado completo. Además, todo esto se hace de forma sencilla aunque laboriosa.
- Lo importante de la definición es que define los números reales solamente usando los números racionales. Es decir, resuelve un problema de *existencia* en sentido matemático.

Supongo lo que estás pensando: "¡Vaya definición extraña de número real! Ahora resulta que un número es una cortadura. . . ¡nada menos que dos conjuntos infinitos de números!". Vayamos poco a poco.

- Es una definición operativa, es decir, permite definir la suma y el producto de números reales, así como la relación de orden y demostrar que verifican las propiedades que definen un cuerpo ordenado completo. Además, todo esto se hace de forma sencilla aunque laboriosa.
- Lo importante de la definición es que define los números reales solamente usando los números racionales. Es decir, resuelve un problema de *existencia* en sentido matemático.

Dos cuerpos ordenados completos son matemáticamente indistinguibles pues se demuestra que entre ellos hay un isomorfismo creciente. Por tanto, *los números reales son el único cuerpo ordenado completo*. La demostración de que *existe* un cuerpo ordenado completo y es *único* es larga, laboriosa y depende de las hipótesis de partida.

Lo más usual es dar por conocidos los números racionales y a partir de ellos *construir* $\mathbb{R}$. Esto puede parecer extraño a primera vista, porque si sólo conocemos los números racionales, ¿de dónde van a salir los demás? De eso precisamente se ocupan los *métodos constructivos* (Cantor, Dedekind). Por ejemplo, si partimos de la intuición de que con los números reales se pueden representar *todos* los puntos de una recta, es claro que un número real queda determinado de forma única por los números racionales menores que él. Esta idea conduce a la *definición* de número real dada por Dedekind.

Lo más usual es dar por conocidos los números racionales y a partir de ellos *construir* $\mathbb{R}$. Esto puede parecer extraño a primera vista, porque si sólo conocemos los números racionales, ¿de dónde van a salir los demás? De eso precisamente se ocupan los *métodos constructivos* (Cantor, Dedekind). Por ejemplo, si partimos de la intuición de que con los números reales se pueden representar *todos* los puntos de una recta, es claro que un número real queda determinado de forma única por los números racionales menores que él. Esta idea conduce a la *definición* de número real dada por Dedekind.

La definición de Cantor es mucho menos intuitiva pues, para Cantor, un número real es una clase de infinitas sucesiones de números racionales que cumplen una cierta propiedad.

Lo más usual es dar por conocidos los números racionales y a partir de ellos *construir* $\mathbb{R}$. Esto puede parecer extraño a primera vista, porque si sólo conocemos los números racionales, ¿de dónde van a salir los demás? De eso precisamente se ocupan los *métodos constructivos* (Cantor, Dedekind). Por ejemplo, si partimos de la intuición de que con los números reales se pueden representar *todos* los puntos de una recta, es claro que un número real queda determinado de forma única por los números racionales menores que él. Esta idea conduce a la *definición* de número real dada por Dedekind.

La definición de Cantor es mucho menos intuitiva pues, para Cantor, un número real es una clase de infinitas sucesiones de números racionales que cumplen una cierta propiedad.

Es posible probar, partiendo de estas definiciones, que el conjunto de los números reales así definidos puede dotarse de una estructura algebraica y de orden de manera que satisface los axiomas de un cuerpo ordenado completo. Este proceso es bastante laborioso; además se corre el peligro de centrar la atención en el proceso en sí mismo olvidándose de lo que se persigue. Por otra parte, las definiciones de Dedekind o de Cantor no son las únicas, hay otras definiciones de número real.

Pensarás que esto no es serio.

Pensarás que esto no es serio.

¿Qué está ocurriendo aquí? Ocurre, sencillamente, que cualquier definición de los números reales a partir de los racionales, esto es, cualquier método constructivo de $\mathbb{R}$, tiene su razón última de ser en el *problema de la existencia*: ¿puede ser construido un cuerpo ordenado completo a partir de los axiomas usuales de la Teoría de Conjuntos? Pues bien, la respuesta es que sí; además, y esto es fundamental, matemáticamente, en un sentido preciso, dicho cuerpo *es único*.

Pensarás que esto no es serio.

¿Qué está ocurriendo aquí? Ocurre, sencillamente, que cualquier definición de los números reales a partir de los racionales, esto es, cualquier método constructivo de $\mathbb{R}$, tiene su razón última de ser en el *problema de la existencia*: ¿puede ser construido un cuerpo ordenado completo a partir de los axiomas usuales de la Teoría de Conjuntos? Pues bien, la respuesta es que sí; además, y esto es fundamental, matemáticamente, en un sentido preciso, dicho cuerpo *es único*.

Da igual, por tanto, cómo se interprete lo que es un número real, lo importante es que de cualquier forma que lo hagamos, los axiomas que definen un cuerpo ordenado completo determinan totalmente sus propiedades matemáticas. Es decir, una vez que sabemos que hay un único cuerpo ordenado completo, lo mejor es olvidar cualquier posible interpretación de cómo sean sus elementos (ningún matemático piensa que $\sqrt{2} = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0 \text{ o } x^2 < 2\}$) y quedarnos exclusivamente con las propiedades de los mismos. Esto es precisamente lo que se hace con el método axiomático que es la forma más conveniente de iniciarse en el estudio de los números reales.

Con la reducción del continuo a lo discreto, parece que finalmente ha triunfado la Aritmética. Pero la historia continua. Por una parte, los números naturales tuvieron un reinado efímero, pues fueron esencialmente reducidos a pura lógica como consecuencia del trabajo pionero de Gottlob Frege. Por otra parte en 1960, el lógico Abraham Robinson (1918 - 1974) construyó un sistema numérico, los *hiperreales*, un cuerpo totalmente ordenado *no arquimediano*, que contiene una copia de los números reales y en el que hay números infinitamente pequeños y números infinitamente grandes. Las técnicas desarrolladas por Robinson se conocen con el nombre de *Análisis No Estándar*. Con dichas técnicas pueden probarse los resultados fundamentales del Cálculo de forma intuitiva y directa al estilo de Newton y Leibniz.

Con la reducción del continuo a lo discreto, parece que finalmente ha triunfado la Aritmética. Pero la historia continua. Por una parte, los números naturales tuvieron un reinado efímero, pues fueron esencialmente reducidos a pura lógica como consecuencia del trabajo pionero de Gottlob Frege. Por otra parte en 1960, el lógico Abraham Robinson (1918 - 1974) construyó un sistema numérico, los *hiperreales*, un cuerpo totalmente ordenado *no arquimediano*, que contiene una copia de los números reales y en el que hay números infinitamente pequeños y números infinitamente grandes. Las técnicas desarrolladas por Robinson se conocen con el nombre de *Análisis No Estándar*. Con dichas técnicas pueden probarse los resultados fundamentales del Cálculo de forma intuitiva y directa al estilo de Newton y Leibniz.

¡Están aquí! ¡Los infinitésimos han regresado!

Acabamos de recorrer el largo camino que lleva del descubrimiento de las cantidades inconmensurables hasta la formalización matemática del concepto de número real. Pero, además de los naturales, enteros, racionales e irracionales, hay otros números, algunos bien conocidos, otros no tanto.

Acabamos de recorrer el largo camino que lleva del descubrimiento de las cantidades inconmensurables hasta la formalización matemática del concepto de número real. Pero, además de los naturales, enteros, racionales e irracionales, hay otros números, algunos bien conocidos, otros no tanto.

Los números que hoy llamamos “complejos” fueron durante muchos años motivo de polémicas y controversias entre la comunidad científica. Poco a poco, por la creciente evidencia de su utilidad, acabaron por ser comúnmente aceptados, aunque no fueron bien comprendidos hasta épocas recientes.

Acabamos de recorrer el largo camino que lleva del descubrimiento de las cantidades inconmensurables hasta la formalización matemática del concepto de número real. Pero, además de los naturales, enteros, racionales e irracionales, hay otros números, algunos bien conocidos, otros no tanto.

Los números que hoy llamamos "complejos" fueron durante muchos años motivo de polémicas y controversias entre la comunidad científica. Poco a poco, por la creciente evidencia de su utilidad, acabaron por ser comúnmente aceptados, aunque no fueron bien comprendidos hasta épocas recientes.

Es Gauss quien definitivamente concede a los números complejos un lugar privilegiado dentro de las matemáticas al probar en 1799 el resultado conocido como *Teorema Fundamental del álgebra*

Acabamos de recorrer el largo camino que lleva del descubrimiento de las cantidades inconmensurables hasta la formalización matemática del concepto de número real. Pero, además de los naturales, enteros, racionales e irracionales, hay otros números, algunos bien conocidos, otros no tanto.

Los números que hoy llamamos “complejos” fueron durante muchos años motivo de polémicas y controversias entre la comunidad científica. Poco a poco, por la creciente evidencia de su utilidad, acabaron por ser comúnmente aceptados, aunque no fueron bien comprendidos hasta épocas recientes.

Es Gauss quien definitivamente concede a los números complejos un lugar privilegiado dentro de las matemáticas al probar en 1799 el resultado conocido como *Teorema Fundamental del álgebra*

El término, hoy usado de *“números complejos”* se debe a Gauss, quien también hizo popular la letra “*i*” que Euler (1707-1783) había usado esporádicamente. En 1806 Argand interpreta los números complejos como vectores en el plano.

El Teorema Fundamental del álgebra nos dice que el procedimiento de ir ampliando el campo numérico con el objetivo de que toda ecuación polinómica tenga soluciones alcanza su cima con los números complejos y que no aparecerán ya por este procedimiento nuevos tipos de números.

El Teorema Fundamental del álgebra nos dice que el procedimiento de ir ampliando el campo numérico con el objetivo de que toda ecuación polinómica tenga soluciones alcanza su cima con los números complejos y que no aparecerán ya por este procedimiento nuevos tipos de números.

Pero podemos preguntarnos si, al igual que hemos definido una multiplicación en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ para obtener $\mathbb{C}$, es posible hacer algo *similar* en $\mathbb{R}^n$ de manera que resulte una estructura a cuyos elementos podamos llamar *números*. Para ello tendremos que ponernos de acuerdo en qué cosa queremos que sea un *número*.

El Teorema Fundamental del álgebra nos dice que el procedimiento de ir ampliando el campo numérico con el objetivo de que toda ecuación polinómica tenga soluciones alcanza su cima con los números complejos y que no aparecerán ya por este procedimiento nuevos tipos de números.

Pero podemos preguntarnos si, al igual que hemos definido una multiplicación en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ para obtener $\mathbb{C}$, es posible hacer algo *similar* en $\mathbb{R}^n$ de manera que resulte una estructura a cuyos elementos podamos llamar *números*. Para ello tendremos que ponernos de acuerdo en qué cosa queremos que sea un *número*.

Lo que está claro es que, sean lo que sean, los números se deben poder sumar y multiplicar; la adición debe tener las propiedades usuales, la multiplicación debe ser distributiva respecto de la adición y todo número distinto de cero debe tener un inverso. La codificación de estas propiedades conduce al concepto de *álgebra real no asociativa de división*: un espacio vectorial real, A, dotado de una aplicación bilineal $A\times A\to A$, $(a,b)\mapsto ab$, llamada *producto*. Debemos exigir que A tenga unidad, es decir, que haya un elemento $u\in A$, $u\neq 0$, tal que $au=ua=a$ para todo $a\in A$. Además, todo elemento $a\neq 0$ debe tener un inverso $b\in A$ tal que $ab=ba=u$.

El Teorema Fundamental del álgebra nos dice que el procedimiento de ir ampliando el campo numérico con el objetivo de que toda ecuación polinómica tenga soluciones alcanza su cima con los números complejos y que no aparecerán ya por este procedimiento nuevos tipos de números.

Pero podemos preguntarnos si, al igual que hemos definido una multiplicación en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ para obtener $\mathbb{C}$, es posible hacer algo *similar* en $\mathbb{R}^n$ de manera que resulte una estructura a cuyos elementos podamos llamar *números*. Para ello tendremos que ponernos de acuerdo en qué cosa queremos que sea un *número*.

Lo que está claro es que, sean lo que sean, los números se deben poder sumar y multiplicar; la adición debe tener las propiedades usuales, la multiplicación debe ser distributiva respecto de la adición y todo número distinto de cero debe tener un inverso. La codificación de estas propiedades conduce al concepto de *álgebra real no asociativa de división*: un espacio vectorial real, A, dotado de una aplicación bilineal $A\times A\to A$, $(a,b)\mapsto ab$, llamada *producto*. Debemos exigir que A tenga unidad, es decir, que haya un elemento $u\in A$, $u\neq 0$, tal que $au=ua=a$ para todo $a\in A$. Además, todo elemento $a\neq 0$ debe tener un inverso $b\in A$ tal que $ab=ba=u$.

Claramente, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ (con el producto complejo) son ejemplos de álgebras reales de división cuyo producto tiene las propiedades asociativas y conmutativas.

Claramente, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ (con el producto complejo) son ejemplos de álgebras reales de división cuyo producto tiene las propiedades asociativas y conmutativas.

En $\mathbb{R}^4$ pongamos $\mathbf{1} = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{i} = (, 1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 0, 1)$ y definamos un producto en el que **1** hace de unidad y:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}, \quad \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$$

extendiéndolo por bilinealidad a $\mathbb{R}^4$.

Claramente, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ (con el producto complejo) son ejemplos de álgebras reales de división cuyo producto tiene las propiedades asociativas y conmutativas.

En $\mathbb{R}^4$ pongamos $\mathbf{1} = (1,0,0,0)$, $\mathbf{i} = (,1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,0,1,0)$, $\mathbf{k} = (0,0,0,1)$ y definamos un producto en el que **1** hace de unidad y:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}, \quad \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$$

extendiéndolo por bilinealidad a $\mathbb{R}^4$.
Es fácil probar que:

$$(a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k})(a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\mathbf{1}$$

Claramente, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ (con el producto complejo) son ejemplos de álgebras reales de división cuyo producto tiene las propiedades asociativas y conmutativas.

En $\mathbb{R}^4$ pongamos $\mathbf{1} = (1,0,0,0)$, $\mathbf{i} = (,1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,0,1,0)$, $\mathbf{k} = (0,0,0,1)$ y definamos un producto en el que **1** hace de unidad y:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}, \quad \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$$

extendiéndolo por bilinealidad a $\mathbb{R}^4$.
Es fácil probar que:

$$(a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k})(a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\mathbf{1}$$

De esta forma obtenemos un álgebra real de división de dimensión 4 llamada el álgebra de los **cuaterniones** de Hamilton que se representa por $\mathbb{H}$. El producto de dicha álgebra es asociativo pero claramente no es conmutativo.

Podemos representar los elementos de $\mathbb{R}^8$ en la forma

$$\left\{ \begin{pmatrix} z & \mathbf{w} \\ -\overline{\mathbf{w}} & \overline{z} \end{pmatrix} : z \in \mathbb{C},\ \mathbf{w} \in \mathbb{C}^3 \right\}$$

donde, para un vector $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^3$, $\overline{\mathbf{w}} = (\overline{w_1}, \overline{w_2}, \overline{w_3})$. Se entiende que dicha matriz representa el vector de $\mathbb{R}^8$ cuyas coordenadas son

$$\big(\mathrm{Re}(z), Im(z), \mathrm{Re}(w_1), \mathrm{Im}(w_1), \mathrm{Re}(w_2), \mathrm{Im}(w_2), \mathrm{Re}(w_3), \mathrm{Im}(w_3)\big).$$

Podemos representar los elementos de $\mathbb{R}^8$ en la forma

$$\left\{ \begin{pmatrix} z & \mathbf{w} \\ -\overline{\mathbf{w}} & \overline{z} \end{pmatrix} : z \in \mathbb{C},\ \mathbf{w} \in \mathbb{C}^3 \right\}$$

donde, para un vector $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^3$, $\overline{\mathbf{w}} = (\overline{w_1}, \overline{w_2}, \overline{w_3})$. Se entiende que dicha matriz representa el vector de $\mathbb{R}^8$ cuyas coordenadas son

$$\big(\operatorname{Re}(z), Im(z), \operatorname{Re}(w_1), \operatorname{Im}(w_1), \operatorname{Re}(w_2), \operatorname{Im}(w_2), \operatorname{Re}(w_3), \operatorname{Im}(w_3)\big).$$

En $\mathbb{R}^8$ definimos un producto por:

$$\begin{pmatrix} z_1 & \mathbf{w}_1 \\ -\overline{\mathbf{w}_1} & \overline{z_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_2 & \mathbf{w}_2 \\ -\overline{\mathbf{w}_2} & \overline{z_2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} z_1 z_2 - \langle \mathbf{w}_1 | \overline{\mathbf{w}_2} \rangle & z_1 \mathbf{w}_2 + \overline{z_2}\,\mathbf{w}_1 + \overline{\mathbf{w}_1} \times \overline{\mathbf{w}_2} \\ -\overline{z_1}\,\overline{\mathbf{w}_2} - z_2 \overline{\mathbf{w}_1} - \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2 & \overline{z_1}\,\overline{z_2} - \langle \overline{\mathbf{w}_1} | \mathbf{w}_2 \rangle \end{pmatrix}$$

Donde, para vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{C}^3$,

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

y

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1 \right)$$

Donde, para vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{C}^3$,

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

y

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1 \right)$$

El producto así definido en $\mathbb{R}^8$ es bilineal, tiene unidad $\mathbf{1} = (1,0,0,0,0,0,0,0)$, no es conmutativo y no es asociativo, aunque verifica las identidades $\mathbf{a}^2\mathbf{b} = \mathbf{a}(\mathbf{ab})$ y $\mathbf{ba}^2 = (\mathbf{ba})\mathbf{a}$ para todos $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^8$. Un álgebra en la que el producto verifica estas identidades se dice que es un **álgebra alternativa**.

Donde, para vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{C}^3$,

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

y

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \big(u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1\big)$$

El producto así definido en $\mathbb{R}^8$ es bilineal, tiene unidad $\mathbf{1} = (1,0,0,0,0,0,0,0)$, no es conmutativo y no es asociativo, aunque verifica las identidades $\mathbf{a}^2\mathbf{b} = \mathbf{a}(\mathbf{ab})$ y $\mathbf{ba}^2 = (\mathbf{ba})\mathbf{a}$ para todos $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^8$. Un álgebra en la que el producto verifica estas identidades se dice que es un **álgebra alternativa**.Además se verifica que

$$\begin{pmatrix} z & \mathbf{w} \\ -\overline{\mathbf{w}} & \overline{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z} & -\mathbf{w} \\ \overline{\mathbf{w}} & z \end{pmatrix} = \big(z\,\overline{z} + \langle \mathbf{w} | \overline{\mathbf{w}} \rangle\big)\mathbf{1}$$

Donde, para vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{C}^3$,

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

y

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1 \right)$$

El producto así definido en $\mathbb{R}^8$ es bilineal, tiene unidad $\mathbf{1} = (1,0,0,0,0,0,0,0)$, no es conmutativo y no es asociativo, aunque verifica las identidades $\mathbf{a}^2\mathbf{b} = \mathbf{a}(\mathbf{ab})$ y $\mathbf{ba}^2 = (\mathbf{ba})\mathbf{a}$ para todos $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^8$. Un álgebra en la que el producto verifica estas identidades se dice que es un **álgebra alternativa**.Además se verifica que

$$\begin{pmatrix} z & \mathbf{w} \\ -\overline{\mathbf{w}} & \overline{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z} & -\mathbf{w} \\ \overline{\mathbf{w}} & z \end{pmatrix} = \left(z\,\overline{z} + \langle \mathbf{w} | \overline{\mathbf{w}} \rangle \right) \mathbf{1}$$

de donde se sigue que es un álgebra de división. Dicha álgebra se llama álgebra de los **octoniones** de Cayley y es un álgebra real de división de dimensión 8 que se representa por $\mathbb{O}$.

Tenemos, pues, cuatro álgebras reales de división, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ (con el producto complejo), $\mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$, de dimensiones respectivas 1, 2, 4 y 8. La pregunta es obligada ¿hay más álgebras reales de división?

Tenemos, pues, cuatro álgebras reales de división, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ (con el producto complejo), $\mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$, de dimensiones respectivas 1, 2, 4 y 8. La pregunta es obligada ¿hay más álgebras reales de división?

La respuesta la dieron F.G. Frobenius (1878) y M. Zorn (1930) probando que, salvo isomorfismos, no hay más álgebras reales de división alternativas de dimensión finita que $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$.

Tenemos, pues, cuatro álgebras reales de división, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ (con el producto complejo), $\mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$, de dimensiones respectivas 1, 2, 4 y 8. La pregunta es obligada ¿hay más álgebras reales de división?

La respuesta la dieron F.G. Frobenius (1878) y M. Zorn (1930) probando que, salvo isomorfismos, no hay más álgebras reales de división alternativas de dimensión finita que $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$.

Otro resultado definitivo fue demostrado por R. Bott y J. Milnor (1958) probando que solamente es posible definir una estructura de álgebra de división en $\mathbb{R}^n$ para los valores $n = 1, 2, 4, 8$.